9-Mavzu: Ko’pyoqlar. Ko’pyoqlilar haqida Eyler teoremasi. Prizma, to’g’ri burchakli parallelepiped, piramida.

Mavzu rejasi:

1. **Ko’pyoqlilar haqida Eyler teoremasi.**
2. **Prizma, to’g’ri burchakli parallelepiped, piramida.**

Tayanch so’z va iboralar: Ko’pyoq, Prizma, to`g`ri burchakli parallelepiped, piramida, apofema

Ikkita yarim tekislikdan va ularni chegaralab turgan umumiy to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan figura ikki yoqli burchak deyiladi. Yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to‘g‘ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasi deyiladi. Ikki yoqli burchakning qirrasiga perpendikulyar tekislik o‘tkazilsa, u yoqlarni ikkita yarim to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu yarim to‘g‘ri chiziqlar tashkil qilgan burchak ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi deyiladi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan figura uch yoqli burchak deyiladi.

Yassi burchaklar uch yoqli burchakning yoqlari, ularning tomonlari esa uch yoqli burchakning qirralari, umumiy uch esa uch yoqli burchakning uchi deyiladi.

Uch yoqli burchak, uchta ikki yoqli burchakdan tashkil topgan.

Shunga o‘xshash ko‘p yoqli burchak ham yassi burchaklardan tuzilganligini qayd qilish mumkin.

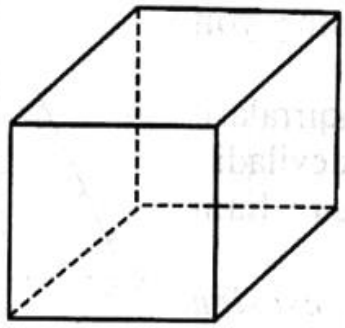
Ko‘pyoqlar.

Sirti chekli miqdordagi yassi tekisliklardan iborat jism ko‘pyoq deyiladi. Agar ko‘pyoqning o‘zi uning sirtidagi har bir ko‘pburchak tekisligining bir tomonida yotsa, bunday ko‘pyoq qavariq ko‘pyoq deyiladi. Qavariq ko‘pyoqning sirti bilan bunday tekislikning umumiy qismi yoq deyiladi. Qavariq ko‘pyoqning yoqlari qavariq ko‘pburchaklardan iborat. Ko‘pyoq yoqlarining tomonlari uning qirralari, uchlari esa ko‘pyoqning uchlari deyiladi. Bu ta’rifni biz kub misolida tushuntiramiz. Kub qavariq ko‘pyoqdir. Uning sirti oltita kvadratdan tashkil topgan. **Ko‘pyoqlilar haqida Eyler teoremasi.** Hamma yoqlari teng muntazam ko‘pburchaklardan tashkil topgan ko‘p- yoqlarni muntazam ko‘pyoqlar deyiladi.

Ko‘pyoqlarning uchlari - u, yoqlari - y, qirralari - q orasidagi bog‘lanishni quyidagi Eyler teoremasi ifodalaydi.

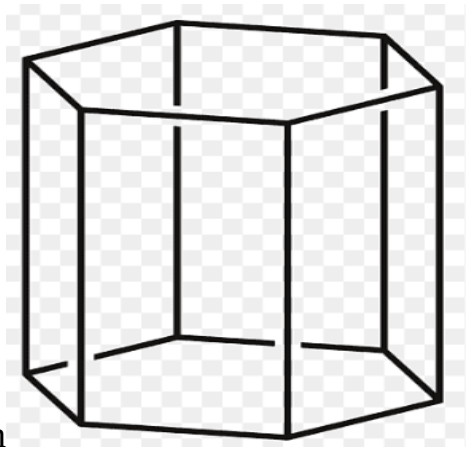
Teorema: Qavariq ko‘pyoqlaming qirralari soni uchlari va yoqlari sonidan 2 ta kamdir. $u+y-q=2$.

1-misol. Parallelipipedda Eyler teoremasini ko’raylik (1-rasm).



$a = 8$
$b = 12$ } $8 + 6 - 12 = 2.$
$c = 6$

2-misol. Asosi muntazam olti burchakli Prizmani Eyler teoremasida ko'raylik (2-rasm).

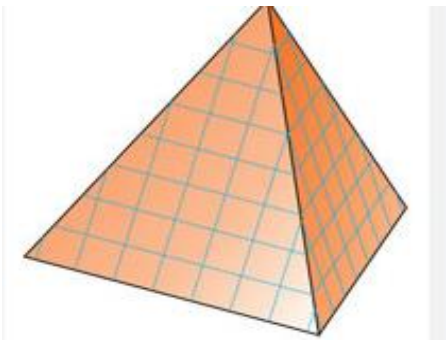


2-rasm

Teorema: Qavariq ko'pyoqlaming qirralari soni uchlari va yoqlari sonidan 2 ta kamdir. u=12, y=8, q=18: 12+8-18=2.

Muntazam ko'pyoqlarning 5 ta turi mavjud. Bular: tetraedr, kub, oktaedr, ikosaedr, dodekaedr.

1. Tetreadr.

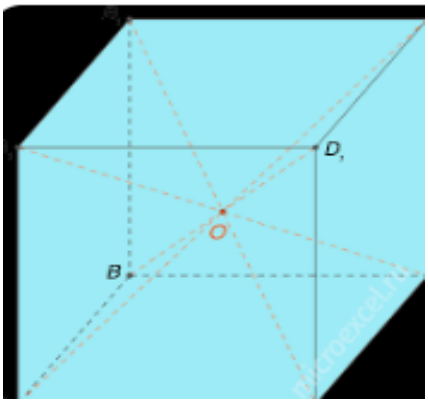


3-rasm

Muntazan tetraedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, har bir uchida uchtadan qirra birlashadi. Tetraedr hamma qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramidadan iborat. U 4 ta yoq, 6 ta qirra, 4 ta uchga ega (92-rasm).

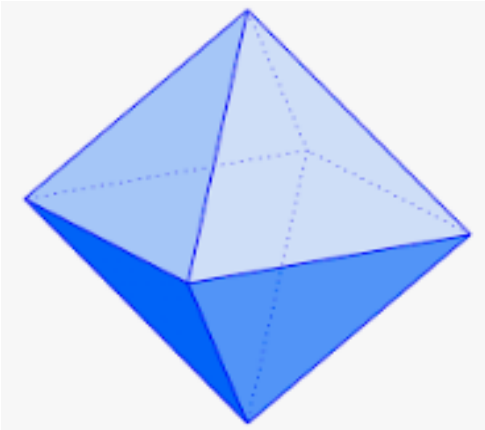
2. **Kub.** Kubning hamma yoqlari kvadratlardan iborat, har bir uchida uchta qirra birlashadi. Kub qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped.

U 6 ta yoq, 12 ta qirra, 8 ta uchga ega (4-rasm).



4-rasm

3. Oktaedr. Oktaedrning yoqlari muntazam uchburchaklar bo‘lib, tetraedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida to‘rtta qirra birlashadi (5-rasm).

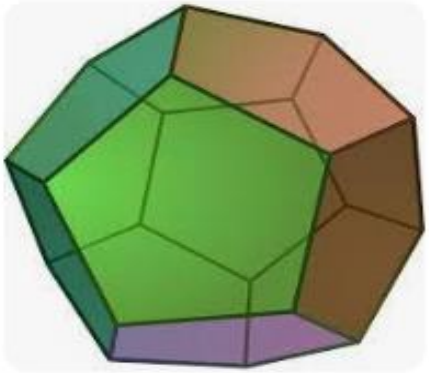


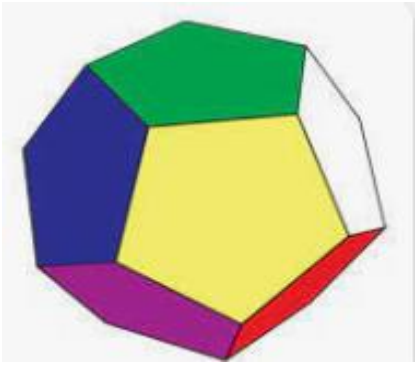
5-rasm

U 8 ta yoq, 12 ta qirra, 6 ta uchga ega.

4. Dodekaedr. Dodekaedrning yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat. Uning har bir uchida uchtadan qirra birlashadi.

U 12 ta yoq, 30 ta qirra, 20 ta uchga ega (6-rasm).

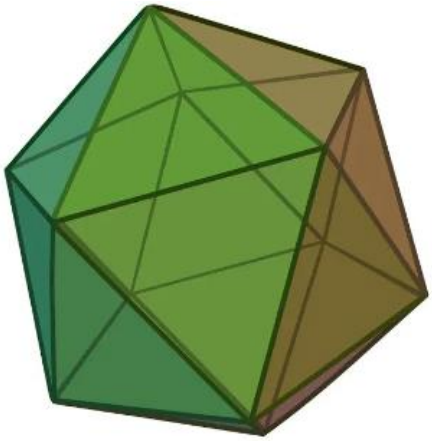




6-rasm

5. Ikosaedr. Ikosaedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lib, tetraedr va oktaedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida beshtadan qirra birlashadi. U 20 ta yoq, 30 ta qirra 12 ta uchga ega (7-rasm).

Eyler teoremasi yuqoridagi barcha muntazam ko‘pyoqlar uchun o‘rinli.



7-rasm

Prizma. Ikki yog‘ining mos tomonlari bir-biriga parallel bo‘lgan teng ko‘pburchakdan iborat bo‘lib, boshqa yoqlari esa parallelogrammdan iborat bo‘lgan ko‘pyoq prizma deyiladi.

3-misol. Anvar yog‘ochdan quticha yasadi. Qutining uzunligi 8sm, eni 5sm, balandligi 4sm bo‘lsa, uning hajmini toping.

Yechim: Hajm=8×5×4=160sm³.

4-misol. Dilnoza do‘konchada ishlaydi. U qandlarni 4sm×3sm×2sm o‘lchamli qutilarga joylaydi. Bitta katta quti 24sm×12sm×8sm bo‘lsa, ichiga necha dona kichik quti joylashadi?

Yechim:

Kichik quti hajmi=24sm³

Katta quti hajmi=2304 sm³

2304÷24=96 ta kichik quti.

5-misol. Sinf burchagida 3 ta bir xil prizma shaklidagi gullar uchun idish bor. Har birining balandligi 10 sm, asosi to‘rtburchak, tomonlari 6sm va 4sm. Uchta idishning jami hajmini toping.

Yechim:

Bitta idish hajmi=6×4×10=240sm³

Uchta idish hajmi=240×3=720sm³.

6-misol. Bir dona qog‘ozdan uzunligi 12sm, eni 8sm, balandligi 6sm bo‘lgan prizma shaklidagi quti yasash kerak. Qutini yasash uchun kamida necha sm² qog‘oz kerak bo‘ladi?

Yechim:

S=2(ab+ah+bh)

=2(12×8+12×6+8×6)

= 2(96+72+48)

= 432sm².

Topshiriqlar.

1-masala (Hajmni topish).

Rasmda ko‘rsatilgan qutining uzunligi 8sm, eni 5sm, balandligi 4sm. Qutining hajmini toping.

Eslatma: Hajmni topish uchun:

Hajm=uzunlik×eni×balandlik.

2-masala (Yuzini topish). O‘qituvchi sinfda kartondan prizma shaklidagi quti yasadi. Qutining o‘lchamlari:
uzunligi 10 sm,
eni 6 sm,
balandligi 4 sm.
Qutining umumiy yuzini toping.
Eslatma: Yuz=2(ab+ah+bh).

3-masala (Qiziqarli – joylash masalasi).

Dilnoza qandlarni kichik qutilarga joylaydi.
Har bir kichik quti: 4sm×3sm×2sm.
Katta quti: 24sm×12sm×8sm.
Katta qutiga nechta kichik quti joylashadi?

4-masala (Amaliy – hayotiy).

Sinfda 3 ta bir xil gullar uchun idish bor.
Har birining o‘lchamlari: 6sm×4sm×10sm.
Ularning umumiy hajmini toping.

5-masala (O‘ylab ko‘r!).

Bir dona qog‘ozdan prizma shaklidagi quti yasash kerak.
Qutining o‘lchamlari: 12 sm × 8 sm × 6 sm.
Bu qutini yasash uchun kamida nechta sm² qog‘oz kerak?
Bu masalalarni rasm bilan ko‘rgazmali qilish uchun:

1-masala – oddiy quti rasmini chizing, yonlariga 8 sm, 5 sm, 4 sm yozing.

2-masala – qutining 6 ta yuzini rang bilan ajratib belgilang.

3-masala – katta quti ichiga kichik qutilar tushirilganini tasvirlang.

4-masala – uchta bir xil to‘rtburchak prizma yonma-yon chiziladi.

5-masala – prizma yoyilmasi (to‘rtburchaklar yig‘indisi)ni chizing.

Parallelepiped. Asosi parallelogramm bo‘lgan prizma parallelepiped deyiladi. Yon qirralari asosga perpendikulyar bo‘lgan parallelepiped to‘g‘ri deyiladi.

Asosi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lgan to‘g‘ri parallellepiped to‘g‘ri burchakli deyiladi.

Kub-barcha qirralari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped.

1-masala (Hajmni topish).

O‘qituvchi yog‘ochdan uzunligi 7sm, eni 5sm, balandligi 3sm bo‘lgan parallelepiped yasadi.

Uning hajmini toping.

Yechim:

Hajm=uzunlik×eni×balandlik=7×5×3=105sm³.

2-masala (Umumiy yuzasini topish)

Bolalar qog‘ozdan parallelepiped shaklidagi quti yasashmoqda. Qutining o‘lchamlari:

uzunligi 6sm,

eni 4sm,

balandligi 2sm.

Qutining barcha yuzalarining umumiy yuzini toping.

Yechim:

S=2(ab+ah+bh)=2(6×4+6×2+4×2)=2(24+12+8)=2×44=88sm².

3-masala (Joylash masalasi).

Anvarning katta qutisi parallelepiped shaklida bo‘lib, uning o‘lchamlari 12sm×8sm×6sm.

U ichiga kichik parallelepiped qutilar joylashtirmoqchi.

Kichik qutining o‘lchamlari 4sm×2sm×2sm.

Katta qutiga nechta kichik quti joylashadi?

Yechim:

Katta qutining hajmi=12×8×6=576sm³

Kichik qutining hajmi=4×2×2=16sm³

576÷16=36 ta quti joylashadi.

4-masala (Amaliy).

Dilafruzning kitob javoni parallelepiped shaklida bo‘lib, uning o‘lchamlari: uzunligi 100sm, eni 30sm, balandligi 120sm.

Bu javonning hajmini toping.

Yechim:

Hajm=100×30×120=360000sm³.

5-masala (O‘ylab ko‘r).

O‘quvchilar parallelepiped shaklidagi qutining ichiga suv quyishdi. Qutining o‘lchamlari: uzunligi 10sm, eni 5sm, balandligi 8sm.

Agar qutiga 1sm³ suv 1 millilitrga teng bo‘lsa, qutiga nechta litr suv sig‘adi?

Yechim:

Hajm=10×5×8=400sm³

1sm³=1ml→400sm³=400ml=0,4litr.

1-topshiriq: Qirralar sonini top.

Bir parallelepipedning nechta:

a) yuzi bor?

b) qirrasi bor?

c) uchisi bor?

Yechim:

Yuzi: 6 ta

Qirrasi: 12 ta

Uchisi: 8 ta

2-topshiriq: Kitob shakli.

Ali bir kitobni o‘lchadi. Kitobning uzunligi 20sm, eni 15sm, balandligi 4sm.

Kitobning hajmini toping.

Yechim:

Hajm=uzunlik×eni×balandlik=20×15×4=1200sm³

3-topshiriq: G‘isht devor.

Bir g‘isht parallelepiped shaklida bo‘lib, o‘lchamlari: uzunligi 25sm, eni 12sm,balandligi 6sm.

Bitta g‘ishtning hajmini toping.

Yechim:

Hajm=25×12×6=1800sm³

4-topshiriq: O‘yinchoq quti.

O‘yinchoq quti parallelepiped shaklida: uzunligi 30sm, eni 20sm, balandligi 10sm.

Qutining barcha yuzlarini qog‘oz bilan qoplash uchun nechta sm² qog‘oz kerak bo‘ladi?

Yechim:

Yuzasi=2(ab+bc+ac)

= 2(30×20+20×10+30×10)

= 2(600+200+300)=2×1100=2200sm²

5-topshiriq: Tenglashtirish.

Parallelepiped va kub o‘rtasidagi farq nima?

Javob:

Parallelepipedda tomonlar uzunligi har xil bo‘lishi mumkin.

Kub — bu barcha qirralari teng bo‘lgan parallelepiped.

3. Piramida. Piramida tushunchasi.

Piramida – bu ko‘pyoqlik bo‘lib, uning asosida ko‘pburchak yotadi, qolgan uchlari esa bitta nuqtada (uchida) tutashadi.

Masalan: 4 ta yon yuzi va 1 ta asosdan iborat bo‘lsa → tetragonal piramida (asos – to‘rtburchak).

Kundalik hayotdagi misollar: choynak qopqog‘i, tel minoralar, ehromlar (Misr piramidalari).

Masalalar va yechimlar.

1-masala: Yuzalar, qirralar va uchlari soni.

Bir to‘rtburchak asosli piramidaning:

a) nechta yuzi bor?

b) nechta qirrasi bor?

c) nechta uchisi bor?

Yechim:

Asos – 1 ta (to‘rtburchak).

Yon yuzlari – 4 ta uchburchak.

Jami yuzlar = 5 ta.

Asosda 4 ta qirra va uchidan tushgan 4 ta qirra → jami 8 ta qirra.

Asosda 4 ta uchi va yuqorida 1 ta uchi → jami 5 ta uchi.

Javob: Yuzi – 5 ta, qirrasi – 8 ta, uchi – 5 ta.

2-masala: Piramidaning hajmi.

To‘rtburchak asosli piramidaning asosi 6sm×4sm va balandligi 9sm. Uning hajmini toping.

Yechim:

Piramida hajmi=1/3×(asosyuzasi)×(balandlik)

=1/3×(6×4)×9

=1/3×24×9

=1/3×216

= 72 sm^3.

Javob: Hajmi – V=72 sm^3.

3-masala: Piramidaning yon yuzlari.

Asosi kvadrat bo‘lgan piramidaning har bir tomoni 5sm. Piramidaning yon yuzlari nechta va ularning shakli qanday?

Yechim:

Asosi kvadrat bo‘lgani uchun yon yuzlari kvadratning 4 ta tomoni bo‘yicha quriladi.

Har bir yon yuzi – uchburchak.

Demak, yon yuzlari soni=4 ta.

Javob: Yon yuzlari – 4 ta uchburchak.

4-masala: Amaliy misol.

Bir ehrom (piramida) asosining tomoni 100m bo‘lgan kvadrat shaklda. Uning balandligi 80m. Hajmini toping.

Yechim:

Asos yuzasi=100×100=10000m².

Hajm=1/3×10000×80

=1/3×800000

= 266666,7 m³ (taxminan).

Javob: Hajmi≈266 667 m³.

5-masala: Taqqoslash.

Kubning hamma yuzlari kvadrat. Piramida esa asosi ko‘pburchak, yon yuzlari uchburchak.

Savol: Kub va piramida o‘rtasidagi asosiy farqlarni toping.

Javob:

Kubda 6 ta yuzi bo‘ladi, piramidada esa yuzlar soni asos shakliga bog‘liq.

Kubning hamma qirralari teng, piramidada teng bo‘lmasligi mumkin.

Kub yopiq shakl, piramidada esa bitta uchiga uchraydi.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Ko‘p yoqli burchaklarga ta’rif bering.
2. Ko‘pyoq deb qanday jismga aytiladi? Qavariq ko‘pyoqqa ta’rif bering.
3. Prizma deb qanday ko‘pyoqqa aytiladi?
4. Piramida deb qanday ko‘pyoqqa aytiladi?
5. Muntazam ko‘pyoqqa ta’rif bering va uning turlarini aytib, tushuntiring?