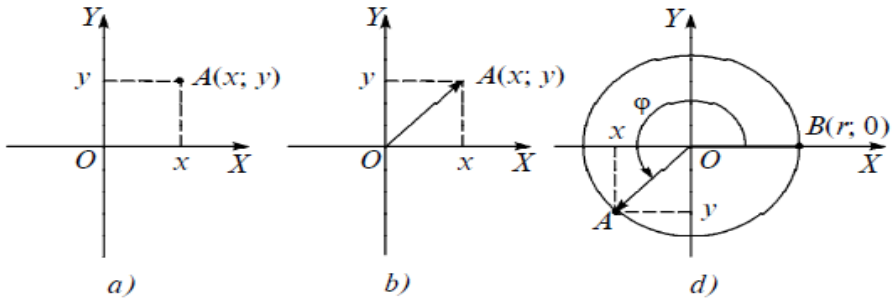
7-MAVZU: Kompleks sonlarning geometrik manosi va trigonometrik shakli. Trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar.

Mavzu rejasi:

1. Kompleks sonlarning geometrik manosi va trigonometrik shakli.
2. Trigonometr ik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar.

Kompleks sonning trigonometrik shakli. Kompleks sonlarga oid asosiy tushuncha ayoniy bo'lishi uchun biror geometrik shakl(figura, shakl) sifatida qarash yetarli.

Biz z=x+yi kompleks sonning geometrik shakli sifatida XOY koordinata tekisligiga $A(x,y)$ nuqtani yoki boshi $Q(0,0)$ nuqtada, oxirida esa $A(x,y)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{OA}$ vektorni qabul qilamiz. Bunda koordinata tekisligining har bir nuqtasi faqat bitta kompleks sonni tasvirlaydi va aksincha, har qanday kompleks son faqat bitta nuqtada tasvirlanadi. Haqiqiy sonlarga abssissa o'qining nuqtalari yi, $i \in R$. Sof mavxum sonlarga esa ordinatalar o'qining nuqtalari mos keladi. Shunga ko'ra koordinatalar tekisligi "kompleks tekislik", abssissa o'qining haqiqiy o'q, ordinatalar o'qi esa mavhum oq sanaladi.



1-chizma

$z=x+yi$ kompleks sonning geometrik tasviri bo'lgan vektor uning radius-vektori deyiladi. Har qanday $z=x+yi$ kompleks son yagona radius-vektorga ega, chunki x, y sonlari yagona A(x,y) nuqtani (vektorning oxirini) aniqlaydi. Kompleks son radius-vektorining uzunligi shu sonning moduli deyiladi. $z=x+yi$ kompleks sonning moduli $|z|$ bilan belgilaymiz. $|z|$, x, y haqiqiy sonlar quyidagi tenglik bilan bog'langan.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

Haqiqatan ham ikki nuqta orasidagi masofaga ko'ra,

$|z| = OA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ tenglik o'rinlidir (1-b chizma).

1-misol. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ kompleks sonning modulini toping.

Yechish: $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ bo'lgani uchun,

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-2)^2}$$

$\overrightarrow{OA}$ vektor $z = x + yi \neq 0$ kompleks sonning radius vektori bo'lsin (1-chizma). Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan $r = |z|$ radiusli aylananing $B(r;0)$ nuqtasini O nuqta atrifida bu nuqta $A(x;y)$ nuqta bilan ustma-ust tushadigan qilib buramiz (1-d *chizma*). Bu ishni, bir-biridan 2π ga karrali bo'lgan burush burchagiga farq qiladigan cheksiz ko'p burish burchaklari yordamida amalga oshirish mumkin. Shu burish burchaklarining har biri $z = x + yi$ kompleks sonning argumenti deb ataladi. 1-d chizmada $z = x + yi$ kompleks sonning argumentlaridan biri bo'lgan φ burchak ko'rsatilgan .

$z = x + yi$ kompleks sonning barcha argumentlari to'plamini *Arg(z)* bilan belgilaymiz.

Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, agar $\varphi \in Arg(z)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $k \in Z$ son uchun $\varphi + 2\pi k \in Arg(z)$ bo'ladi.

Shu sababli *Arg(z)* to'plamni quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$Arg(z) = \{\varphi + 2\pi k \,|k \in Z\}$$

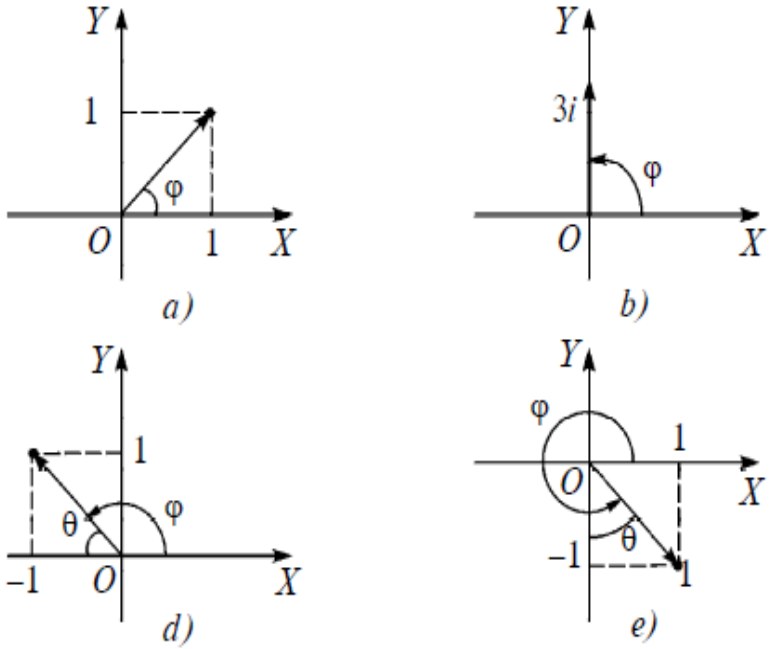
Burish burchagining kosinusi va sinusi ta'riflaridan ko'rinadiki, $z = x + yi$ kompleks sonning har qanday φ argumenti uchun quyidagi munosabatlar o'rinli.

$$cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad sin\varphi = \frac{y}{|z|}\,.$$

Bu tengliklar asosida $z = x + yi$ kompleks sonini $z = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$ ko'rinishida yozib olish mumkin. Bunday yozish kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda tasvirlash deb yurutiladi.

Kompleks son cheksiz ko'p argumentga ega bo'lgani uchun, uni cheksiz ko'p usullar bilan trigonometrik shaklda yozish mumkin. Shu sababli kompleks sonning tayin bir oraliqda yotadigan argument orgali yozish maqsadga muvofiqdir. Biz ana shunday oraliq sifatida $[0;2\pi]$ oraliqni olamiz. Bu oraliqda har qanday $z(z\neq 0)$ kompleks sonining faqat bitta argumenti yotadi.

$z = x + yi$ kompleks sonning $[0;2\pi]$ oraliqda yotadigan argumenti shu sonning bosh argumenti deyiladi va $arg(z)$ bilan belgilanadi. Shunga muvofiq ravishda, $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$ ni $\boldsymbol{z}$ kompleks sonning bosh trigonometrik shakli dab ataymiz.



2-chizma

Bundan keyin, kompleks sonning argumenti va kompleks sonning trigonometrik shakli deyilganda, mos ravishda kompleks sonning bosh argumenti va bosh tigonometrik shakli nazarda tutiladi.

Endi z=0 soni ustida toxtalamiz. Bu sonning moduli 0 ga teng, lekin argumenti aniqlanmaydi.

2-misol. a) $1+i$ b) $3i$ d) $-1+i$ e) $1-i$ sonlarini trigonometrik shakilda ifodalang.

Yechish.

a) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$1+i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$ (2-a chizma)

b) $|3i| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $3i = 3(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2})$ (2-b chizma)

d) $|-1+i| = \sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}$ (2-d chizma)

e) $|1-i| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2} + \theta$ $\begin{cases} sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{3\pi}{2} + \\ \theta \in (0;\frac{\pi}{2}) \end{cases}$

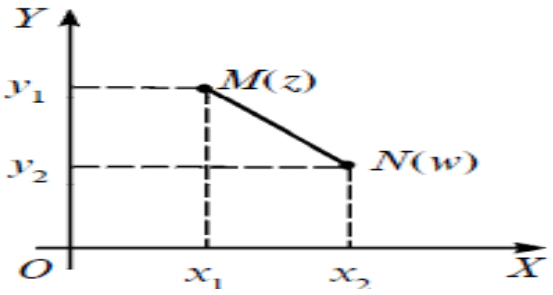
$+\theta = \frac{7\pi}{2}$, $1-i = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$ (2-e chizma)

3-misol. M(z) va $N(k)$ nuqtalar orasidagi masofa $|z-w|$ ga tengligini isbotlang.

Isbot. $z = x_1 + iy_1$ va $w = x_2 + iy_2$ sonlari uchun

$$|z - w| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ga egamiz. Bu tenglikning o'ng tomoni M va N nuqtalar orasidagi masofadir (3-chizma).



3-misoldan ko'rinadiki $|z - z_0| = r$ $(r > 0)$ tenglama markazi z_0 nuqtadan bo'lgan r radiusli aylananing tenglamasidir.

Savol va topshiriqlar.

1. Kompleks sonning geometrik ma'nosi va trigonometrik shaklini tushuntiring.
2. Trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar bajaring.

3. Kompleks tekislikning z kompleks songa mos keluvchi nuqtani yasang, bunda:

a) $z = 1 + 2i$;
b) $z = -1 + 2i$;
d) $z = -1 - 2i$;
e) $z = 1 - 2i$;
f) $z = 2i$;
g) $z = 1$;
h) $z = -2i$;
i) $z = -1$;
j) $z = 0$;
k) $z = 3 - 2i$;
l) $z = -3 + 2i$;
m) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
n) $z = 2 + 3i(1 + 2i)$;
o) $z = i - 4i(1 + i)$;
p) $z = i^4 + i^5$;
q) $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{2}$.