7-Mavzu: Kompleks sonlarning geometrik ma’nosi va trigonometrik shakli.

Mavzu rejasi: 1. Kompleks sonlarning geometrik ma’nosi.

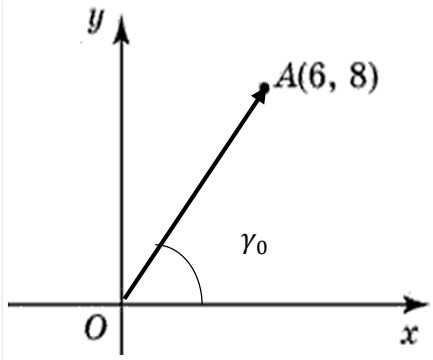
2. Trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar.

1. Kompleks sonlarning geometrik ma’nosi.

Har bir $a+bi$ kompleks songa tekislikda $(a;b)$ nuqtani mos qo’ysak, bu nuqta kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi. Bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtirsak, boshi koordinatalar boshida, uchui esa $(a;b)$ koordinatali nuqtada bo’lgan $\overline{OA}$ vektor hosil bo’ladi. Bu vektorlarning uzunligi esa $a+bi$ *kompleks* sonning moduliga tengligi ayon.

Har bir bi kompleks songa Oy o’qida $(0;b)$ nuqta mos keladi. Bu o’qni mavhum *o’q* deb ataymiz. Ox o’qni haqiqiy *o’q* deymiz.

$\overline{OA}$ vektorning Ox o’qi musbat yo’nalishining soat mili qarama-qarshi yo’nalishida hosil qilgan γ_0 burchagi $a+bi$ kompleks sonning boshlang’ich *argumenti* deyiladi.



$a+bi$ kompleks son berilgan bo’lib, r ning moduli γ esa argument bo’lsin, u holda $b = rsin\gamma$, $a = rcos\gamma$ tengliklarni ko’rsatish qiyin emas. Demak, $a + bi = r(cos\gamma + isin\gamma)$ tenglik o’rinli. Bu esa kompleks sonning *trigonometrik* ko’rinishi deyiladi.

$z_1 = r_1(cos\gamma_1 + isin\gamma_1), z_2 = r_2(cos\gamma_2 + isin\gamma_2)$ kompleks sonlar berilgan bo’lsin. u holda quyidagilar o’rinli.

1^0. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(cos(y_1 + \gamma_2) + isin(y_1 + \gamma_2))$.

2^0. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\gamma_1 - y_2) + isin(\gamma_1 + y_2))$.

$z^n = (r(cos\gamma + isin\gamma))^n = r^n(cosn\gamma + isinn\gamma)$, bu formula *Muavr formulasi* deyiladi.

$z = r(cos\gamma + isin\gamma)$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bunda r kompleks sonning moduli, $\gamma = y_0 + 2k\pi$ kompleks sonning argumenti, γ_0-boshlang'ich agrumentli bo'lsin. U holda z kompleks son n ta har xil n-darajali kompleks ildizlarga ega bo'ladi va bu ildizlar quyidagi formula yordamida topiladi.

$$U_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\gamma_0+2k\pi}{n} + isin\frac{\gamma_0+2k\pi}{n}\right), k = 1, \dots, n-1.$$

1-misol. $|z + 2| = 3$ tenglamani yeching.

Yechish: Kompleks sonning moduli, kompleks sonlarning tengligi ta'riflaridan quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$|z + 2| = |x + yi + 2| = |(x + 2) + yi| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 3.$$

Bundan $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ tenglamani hosil qilamiz. Hosil bo'lgan tenglamaning yechimlari tekislikdagi markazi (-2;0) nuqtada bo'lgan, radiusi 3 ga teng aylananing nuqtalaridan iborat.

2-misol. $\sqrt{3 + 4i}$ ni hisoblang.

Yechish: Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarish formulalari

1) $b > 0,\ \sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$ va

2) $b < 0, \sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$

lardan foydalanamiz. Berilgan misolda b>0 bo'lganligi uchun birinchi formulani qo'shamiz:

$$\sqrt{3 + 4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right) =$$

$$= \pm(2 + 2i) = \pm 2(1 + i).$$

3-misol. $\sqrt[3]{2 + 3i}$ ildizlarni hisoblang.

Yechish. Ixtiyoriy kompleks sondan n-darajali ildizlarni topish formulasi

$$u_k = |c|^{\frac{1}{n}}\left(cos\frac{\gamma_0+2k\pi}{n} + isin\frac{\gamma_0+2k\pi}{n}\right), k = 1, \dots, n-1 \qquad (1)$$

dan foydalanamiz. Buning uhun avval berilgan $z = 2 + 3i$ kompleks sonni trigonometric ko'rinishga keltiramiz: kompleks sonning moduli

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13};$$

argumenti; $\gamma = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{3}{2}$ dan iborat. U holda

$$z = 2 + 3i = \sqrt{13}\left(cos\left(arctg\frac{3}{2}\right) + isin\left(arctg\frac{3}{2}\right)\right).$$

Topilgan modul va argument (1) formulaga qo'yamiz:

$$u_k = \sqrt{13}^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{arctg\frac{3}{2}+2k\pi}{3} + isin\frac{arctg\frac{3}{2}+2k\pi}{3}\right), k = 0,1,2.$$

Bundan $u_0 = \sqrt[6]{13}\left(cos\frac{arctg\frac{3}{2}}{3} + isin\frac{arctg\frac{3}{2}}{3}\right)$,

$$u_1 = \sqrt[6]{13}\left(cos\frac{arctg\frac{3}{2}+2\pi}{3} + isin\frac{arctg\frac{3}{2}+2\pi}{3}\right),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{13}\left(cos\frac{arctg\frac{3}{2}+4\pi}{3} + isin\frac{arctg\frac{3}{2}+4\pi}{3}\right)$$

ildizlarni hosil qilamiz.