6-Mavzu: Kompleks sonlar. Kompleks sonlar to'plami.

Mavzu reja:

1. Mavhum son tushunchasi. Kompleks son va uning turli shakllari.

2. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar.

3. Kompleks sonlar to'plamining xossalari.

1. Mavhum son tushunchasi.

Bu yangi son hech qanday real kattalikning o'lchamini yoki uning o'zgarishini ifodalamaydi. Shu sababli uni mavhum (hayoliy, haqiqatda mavjud bo'lmagan) birlik deb atash va maxsus belgilash qabul qilingan:

$\sqrt{-1}$=***i.*** Mavhum birlik uchun i^2 **=-1** tenglik o'rinlidir.

a+bi ko'rinishidagi ifodani qaraymiz. Bu yerda ***a*** va ***b*** lar istalgan haqiqiy sonlar, *i* esa mavhum birlik. ***a+bi*** ifoda haqiqiy son ***a*** va mavhum son bi lar "kompleks" dan iborat bo'lgani uchun uni kompleks son deb atash qabul qilingan.

a + bi *ifoda algebraik shakldagi kompleks* son deb ataladi, bu yerda ***a***$\in R$, ***b***$\in R$, $i^2 = -1$.

Bu paragrafda ***a+bi*** ni qisqalik uchun "algebraik shakldagi kompleks son" deyish o'rniga **"*kompleks son*"** deb ataymiz.

Kompleks sonni bitta harf bilan belgilash qulay. Masalan, ***a + bi*** ni ***z= a+ bi*** ko'rinishida belgilash mumkin. $z= a + bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi ***a*** ni Re(z) (fransuzcha reele – haqiqiy).

Masalan, $z_1=1.5+\frac{4}{5}i$ va $z_2=\frac{3}{2}+0.8i$ sonlari uchun $Re(z_1)=Re(z_2)=1.5$, $Im(z_1)=Re(z_2)=0,8$. Demak, $z_1=z_2$.

Bir-biridan faqat mavhum qismlarining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi. $z=a+bi$ kompleks songa qo'shma kompleks son $\bar{z}=a-bi$ ko'rinishida yoziladi. Masalan, $6+7i$ va $6-7i$ lar qo'shma kompleks sonlardir:

$\overline{6+7\imath}=6-7i$. Shu kabi $\bar{z}$ soniga qo'shma son $\bar{\bar{z}}=z$ bo'ladi.

Masalan, $\overline{\overline{6+7\imath}} = \overline{6-7\imath}=6+7i$. a haqiqiy songa qo'shma son a ning o'ziga teng:

$\bar{a} = \overline{a+0\cdot\imath} = a - 0\cdot i = a$. Lekin bu mavxum songa qo'shma son $\overline{b\imath}$ = bi dir.

Chunki $\overline{b\imath} = = \overline{0+b\cdot\imath} = 0 - bi = - bi$, $a,b\in R$.

2. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar.

$(a+bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$ (1)

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$ (2)

$(a + b)\cdot(c + d) = (ac - bd) + (ad + bc);$ (3)

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{b-+ad}{c^2+d^2}i.$ (4)

(1) *va* (2) tengliklarni bevosita qo'llash qiyin emas. Kompleks sonlarni ko'paytirish amalini i^2 = -1 ekanligini e'tiborga olib, ko'phadlarni ko'paytirish kabi bajarish mumkin.

1-misol. Kompleks sonlar yig'indi.

a) (4+2*i*)+(5+3*i*)=(4+5)+(2*i*+3*i*)=9+5*i*

b) (7+9*i*)+(6+2*i*)=(7+6)+(9*i*+2*i*)=13+11*i*

c) (8+2*i*)+(6+3*i*)=(8+6)+(2*i*+3*i*)=14+5*i*

d) (5+3*i*)+(7+*i*)=(5+7)+(3*i*+*i*)=12+4*i*

e) (11+2*i*)+(12+3*i*)=(11+12)+(2*i*+3*i*)=23+5*i*

f) (9+8*i*)+(10+8*i*)=(9+10)+(8*i*+8*i*)=19+16*i*

l) (15+16*i*)+(23+14*i*)=(15+23)+(16*i*+14*i*)=37+30*i*

k) (15+4*i*)+(15+4*i*)=(15+15)+(4*i*+4*i*)=30+8*i*

2-misol. Kompleks sonlar ayirmasi.

a) (6-2*i*)-(8-3*i*)=(6-8)-(-2*i*+3*i*)=-2-*i*

b) (9-9*i*)-(6-2*i*)=(9-6)-(-9*i*+2*i*)=3+7*i*

c) (8+2*i*)-(6+3*i*)=(8-6)-(2*i*+3*i*)=2-5*i*

d) (12-3*i*)+(6+*i*)=(12+6)+(-3*i*+*i*)=18-2*i*

e) (10+*i*)-(11-*i*)=(10+11)+(*i*+*i*)=21+2*i*

f) (9-8*i*)-(10-8*i*)= -1

l) (5+6*i*)-(3+4*i*)=(5-3)+(6*i*-4*i*)=2+2*i*

k) (5-4*i*)+(5+4*i*)=(5+5)+(-4*i*+4*i*)=10

3-misol. Kompleks sonlar ko'paytmasi. *Kompleks sonlarni ko'paytirish amalini i^2 = -1 ekanligini e'tiborga olib, ko'phadlarni ko'paytirish kabi bajarish mumkin.*

a) (6+2*i*)·(4-3*i*)=24-18*i*+8*i*-6i^2=24-6·(-1)-10*i*=30-10*i*

b) (4-2*i*)·(3-2*i*)=12-8*i*-6*i*+4i^2=12-14*i*+4(-1)=8-14*i*

c) (7+*i*)·(7-*i*)=49-7*i*+7*i*-i^2=50

d) (3-*i*)·(5-*i*)=15-3*i*-5*i*+i^2=15-8*i*+(-1)=14-8*i*

e) (2-8*i*)·(6-*i*)=12-2*i*-48*i*-8i^2=12-50*i*+8=20-50*i*

f) $(12+i)\cdot(3+2i)=36+24i+3i+2i^2=36+27i+2(-1)=34+27i$

l) $(8-5i)\cdot(9+2i)=72+16i-45i-10i^2=72-29i-10(-1)=82-29i$

k) $(4-2i)\cdot(3-2i)=12-8i-6i+4i^2=12-14i+4(-1)=8-14i$

5-misol. Kompleks sonlarni bo'lish. *(4) formulani eslab qolish va amaliyotda bevosita qo'llash ancha qiyin.*

Shu sababli $\frac{a+bi}{c+di}$ *ni hisoblash uchun, uning surati va maxrajini c–d·i ga ko'paytirib, tegishli amallarni bajarish qulaydir.*

a) $\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{9+6i-6i+4}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i.$

b) $\frac{3+i}{2-2i}=\frac{(3+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{6+6i+2i+2i^2}{4+4i-4i-4i^2}=\frac{4+8i}{8}=\frac{1}{2}+i$

c) $\frac{5+2i}{2+2i}=\frac{(5+2i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{10-10i+4i-4i^2}{4+4i-4i-4i^2}=\frac{14-6i}{8}=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}i$

d) $\frac{8+3i}{3+5i}=\frac{(8+3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\frac{24-40i+9i-15i^2}{9-25i^2}=\frac{39-31i}{34}=\frac{39}{34}-\frac{31}{34}i$

e) $\frac{8-3i}{4-7i}=\frac{(8-3i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}=\frac{32+56i-12i-21i^2}{16-49i^2}=\frac{32+44i+21}{65}=\frac{53}{65}+\frac{44}{65}i$

f) $\frac{7+7i}{7-7i}=\frac{(7+7i)(7+7i)}{(7-7i)(7+7i)}=\frac{49+49i+49i+49i^2}{49-49i^2}=\frac{49+98i-49}{65}=\frac{98}{65}i$

l) $\frac{5-5i}{2-2i}=\frac{(5-5i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{10+10i-10i-10i^2}{4-4i^2}=\frac{10+0i+10}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}+0i$

k) $\frac{7+7i}{7-7i}=\frac{(7+7i)(7+7i)}{(7-7i)(7+7i)}=\frac{49+49i+49i+49i^2}{49-49i^2}=\frac{49+98i-49}{65}=\frac{98}{65}i$

3. Kompleks sonlar to'plamining xossalari.

Kompleks sonlar to'plami yopiqdir

Kompleks sonlar to'plami qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari uchun yopiqdir. Ya'ni, agar z_1 va z_2 kompleks sonlar bo'lsa, u holda:

z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, (agar $z_2\neq 0$) ham kompleks son bo'ladi.

Kompleks sonlar to'plami vektorli fazo

Kompleks sonlar to'plami ikki o'lchovli vektorli fazo sifatida qaralishi mumkin. Har bir kompleks sonni $a+bi$ shaklida ifodalash mumkin, bu erda a va b haqiqiy sonlar bo'lib, a va b sonlari kompleks sonning haqiqiy va xayoliy qismlarini tashkil qiladi. Demak, kompleks sonlar to'plami ikki o'lchovli vektorlardan iborat bo'ladi.

Kompleks sonlar to'plami assotsiativdir

Kompleks sonlar to'plami assotsiativ xossaga ega:

Qo‘shishda: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

Ko’paytirishda: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3=z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Kompleks sonlar to'plami kommutativdir

Kompleks sonlar to'plami kommutativ xossaga ega:

Qo‘shishda: $z_1+z_2=z_2+z_1$

Ko’paytirishda: $z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1$

Kompleks sonlar to'plamida nollikka nisbatan element mavjud

Kompleks sonlar to'plamida 0 elementi mavjud, ya'ni, 0 soni har qanday kompleks son bilan qo‘shilganda o'zgarmaydi:

$z+0=z$

Kompleks sonlar to'plamida birlik element mavjud

Kompleks sonlar to'plamida birlik element mavjud, ya'ni 111 soni har qanday kompleks son bilan ko‘paytirilganda o'zgarmaydi:

$z \cdot 1=z$

Kompleks sonlar to'plamida qarshi elementlar mavjud

Qo‘shishda: Har bir kompleks son $z=a+bi$ uchun uning qarshi elementi $-z=-a-bi$ mavjud. Bu element qo‘shilganda 0 ni hosil qiladi:

$z+(-z)=0$

Ko‘paytirishda: Har bir nolga teng bo'lmagan kompleks son $z=a+bi$ uchun uning qarshi elementi $\frac{1}{z}$ bo'lib, bu element bilan ko‘paytirilganda 1 ni hosil qiladi:

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1$$

Kompleks sonlar to'plami bo'yicha geometriya

Kompleks sonlar to'plami tekislikda nuqtalar sifatida tasvirlanishi mumkin. Har bir kompleks son z=a+bi haqiqiy qism a va xayoliy qism b bo'yicha tekislikda nuqta sifatida joylashadi.

Kompleks sonlar to'plami uzluksizdir

Kompleks sonlar to'plami uzluksiz va to'liq bo'lib, har qanday kompleks sonlar to'plamida cheksiz sonlar o'rnini bosadigan tartibli ketma-ketliklar mavjud.

Ikki kompleks sonni ko‘paytirishda distributivlik qo‘llaniladi: (a+bi)(c+di)=(ac−bd)+(ad+bc)i

Savol va topshiriqlar

1. Mavhum son tushunchasi tushuntiring.
2. Kompleks son va uning turli shakllari haqida malumot bering.
3. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarlarni tushuntiring.
4. Kompleks sonlar to’plamining xossalari ayting.