6-mavzu: Kompleks sonlar. Kompleks sonlar to'plami. Kompleks sonlar: Mavhum son tushunchasi. Kompleks son va uning turli shakllari. Kompleks sonlar to'plami. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar. Kompleks sonlar to'plamining xossalari.

Mavzu rejasi: 1. Kompleks sonlar: Mavhum son tushunchasi. Kompleks son va uning turli shakllari. Kompleks sonlar to'plami.

2. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar. Kompleks sonlar to'plamining xossalari.

Kompleks sonlar ta'limoti ilm-u fanda, xususan matematikada alohida o'rin tutadi. Tez rivojlanayotgan bu soha texnikada, shuningdek ishlab chiqarishning ko'plab sohalarida g'oyat keng qo'llanishga ega. Shu sonlar haqida ayrim ma'lumotlarni keltiramiz.

Xususan bir misoldan boshlaylik.

$x^2 + 9 = 0$ tenglmani yechish jarayonida $x_1 = 3\sqrt{-1}$ va $x_1 = -3\sqrt{-1}$ "sonlar" hosil bo'ladi. Bu o'rgangan haqiqiy sonlar orasida bunday "sonlar" mavjud emas. Bunday holatdan qutulish uchun $\sqrt{-1}$ ga son deb qarash zarurati paydo bo'ladi.

Bu yangi son hech qanday teal kattalikning o'lchamini yoki uning o'zgarishini ifodalamaydi. Shu sababli uni mavhum (hayoliy haqiqatda mavjud bo'lmagan) birlik deb atash va maxsus belgilash qabul qilingan: $\sqrt{-1} = i$. Mavhum birlik uchun $i^2 = -1$ tenglik o'rinlidir.

$a + bi$ ko'rinishidagi ifodani qaraymiz. Bu yerda a va b lar istalgan haqiqiy sonlar, i esa mavhum birlik. $a + bi$ ifoda haqiqiy son a va mavhum son bi lar "kompleksi" dan iborat bo'lgani uchun uni *kompleks* son deb atash qabul qilingan.

$a + bi$ ifoda algebraik shakldagi *kompleks* son deb ataladi, bu yerda $a\epsilon R, b\epsilon R,\ i^2 = -1$. Bu paragrafda $a + bi$ ni qisqalik uchun "algebraik ko'rinishdagi kompleks son" deyish o'rniga "kompleks son" deb ishlataveramiz.

Kompleks sonlarni bitta harf bilan belgilash qulay. Masalan, $a + bi$ ni $z = a + bi$ ko'rinishda belgilash mumkin. $z = a + bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi a ni Re(z) (fransuzcha reele –haqiqiy) bilan, mavhum qismi b ni esa Im(z) (fransuzcha imaginaire –mavhum) bilan belgilash qabul qilingan.

Agar $z = a + bi$ kompleks son uchun $b = 0$ bo'lsa, haqiqiy son $z = a$ hosil bo'ladi. Demak, haqiqiy sonlar to'plami R barcha *kompleks* sonlar to'plami C ning qism to'plami bo'ladi: $R \subset C$.

1-misol. $z_1 = 1 + 3i,\ \ z_2 = 4 - i,\ \ z_3 = 5,\ \ z_4 = 8i,\ \ z_5 = 0$ kompleks sonlarning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Yechish. Kompleks son haqiqiy va mavhum qismlarining aniqlashiga ko'ra quyidagilarga egamiz.

$Re(z_1) = 1;\ Re(z_2) = 4;\ Re(z_3) = 5;\ Re(z_4) = 0;\ \ Re(z_5) = 0;$

$Im(z_1) = 3i;\ Im(z_2) = -i;\ Im(z_3) = 0; Im(z_4) = 8i;\ Im(z_1) = 0;$

Kompleks sonlar uchun "<", ">" munosabatlari aniqlanmaydi, lekin teng kompleks sonlar tushunchasi kiritiladi.

Haqiqiy va mavhum qismlari mos ravishda teng bo'lgan kompleks sonlar teng kompleks sonlar deb ataladi.

Masalan, $z_1 = 2{,}5 + \frac{8}{5}i$ va $z_2 = \frac{5}{2} + 1{,}6i$ sonlari uchun

$Re(z_1) = Re(z_2) = 2{,}5$

$Im(z_1) = Im(z_2) = 1{,}6$. Demak, $z_1 = z_2$.

Bir biridan faqat mavhum qismlarining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi. $z = a + bi$ kompleks songa qo'shma kompleks son $\bar{z} = a - bi$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, $6 + 9i$ va $6 - 9i$ sonlar qo'shma kompleks sonlardir. Shu kabi $\bar{z}$ soniga qo'shma son $\bar{\bar{z}} = z$ bo'ladi. Masala, $\overline{\overline{6 + 9i}} = \overline{6 - 9i} = 6 + 9i$. a haqiqiy songa qo'shma son a ning o'ziga teng: $\bar{a} = \overline{a + 0 \cdot i} = a - 0 \cdot i = a$. Lekin bi mavhum songa qo'shma son $\overline{bi} = -bi$ dir. Chunki $\overline{bi} = \overline{0 + bi} = 0 - bi = -bi,\ a=b \in R$.

2. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar. Kompleks sonlar to'plamining xossalari.

a) Qo'shish

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$

2-misol.

$(3+2i)+(4+5i)=(3+4)+(2+5)i=7+7i.$

b) Ayirish

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$

3-misol.

$(6+4i)-(2+7i)=(6-2)+(4-7)i=4-3i.$

c) Ko'paytirish

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$

$i^2=-1$ bo'lgani uchun:

$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

4-misol.

$(2+3i)(4+5i)=(2\cdot4-3\cdot5)+(2\cdot5+3\cdot4)i=(8-15)+(10+12)i=-7+22i.$

d) Bo'lish

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

5-misol.

$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1} =$

$= \frac{3+5i-2}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$.

Kompleks sonning modul va qarama-qarshisi.

Modul**:**

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

6-misol: z=3+4i⇒$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Qarama-qarshi son. $|\bar{z}| = a - bi$

7-misol. z=3+4i, $\bar{z} = 3 - 4i$.

8-misol. (4+3i)+(−2+5i)

Yechim: haqiqiy va mavhum qismlarni qo‘shamiz:

(4−2)+(3+5)i=2+8i.

9-misol. (5−2i)(3+4i)

Yechim: *(a+bi)(c+di)=(ac−bd)+(ad+bc)i.*

ac=5·3=15, *bd*=(−2)·4=−8⇒*ac-bd*=15-(-8)=23.

ad=5·4=20, *bc*=(−2)·3=−6⇒*ad*+*bc*=20−6=14.

Natija: 23+14i.

10-misol. (2+3i)+(4+5i)

Yechim: haqiqiy va mavhum qismlarni alohida qo‘shamiz:

(2+4)+(3+5)i=6+8i

11-misol. (7+2i)−(3+6i)

Yechim: haqiqiy va mavhum qismlarni ayiramiz:

(7−3)+(2−6)i=4−4i.

12-misol. (5−4i)+(2+9i)

Yechim: haqiqiy va mavhum qismlarni alohida qo‘shamiz:

(5+2)+(−4+9)i=7+5i.

13-misol. (3+4i)+(−5+2i)

Yechim: haqiqiy va mavhum qismlarni alohida qo‘shamiz:

(3−5)+(4+2)i=−2+6i.

14-misol. (8−7i)−(10−12i)

Yechim: haqiqiy va mavhum qismlarni alohida qo‘shamiz:

Haqiqiy: 8−10=−2.

mavhum: −7−(−12)=−7+12=5.

Natija: −2+5i.

15-misol. (1+2i)+(3−4i)+(−2+i)

Yechim: barcha haqiqiylarni va barcha mavhumlarni alohida qo‘shamiz:

Haqiqiy: 1+3−2=2.

mavhum: $2-4+1=-1$.
Natija: $2-i$.
16-misol. $(5+3i)-(2+7i)-(1-4i)$
Yechim: Birinchi ikkitani ayiramiz, so‘ng uchinchisini ham:
Birinchi: $(5+3i)-(2+7i)=3-4i$.
So‘ng: $(3-4i)-(1-4i)=(3-1)+(-4-(-4))i=2+0i=2$.
Natija: 2.
17-misol. $(2+3i)+(4-5i)-(1+2i)$
Yechim: Birinchi qo‘shamiz: $(2+3i)+(4-5i)=6-2i$.
So‘ng ayiramiz: $(6-2i)-(1+2i)=5-4i$.
Natija: $5-4i$.
18-misol. $(-3+7i)-(-5-2i)+(4+i)$
Yechim: avval ayirish: $(-3+7i)-(-5-2i)=(-3+5)+(7-(-2))i=2+9i$.
So‘ng qo‘shamiz: $(2+9i)+(4+i)=6+10i$.
Natija: $6+10i$.
Ko‘paytmaga doir misollar.
19-misol. $(2+3i)(4+5i)$
Yechim: $(2\cdot4-3\cdot5)+(2\cdot5+3\cdot4)i=(8-15)+(10+12)i=-7+22i$.
20-misol. $(1+2i)(1-2i)$
Yechim: Bu a+bi va a−bi ko‘rinishi:
$(1+2i)(1-2i)=1^2+2^2=1+4=5$ (faqat haqiqiy son).

Mustaqil ish topshiriqlari.

1. Oddiy misollar (qo‘shish va ayirish)
a) $(2+3i)+(4+5i)(2+3i)$ + $(4+5i)(2+3i)+(4+5i)$
b) $(7+2i)-(3+6i)$
c) $(5-4i)+(2+9i)(5-4i)$ + $(2+9i)(5-4i)+(2+9i)$
2. Ko‘paytirish misollari
a) $(3+2i)(4+5i)(3+2i)(4+5i)(3+2i)(4+5i)$
b) $(1+3i)(1-3i)(1+3i)(1-3i)(1+3i)(1-3i)$
c) $(2-i)(2+i)(2-i)(2+i)(2-i)(2+i)$
3. Bo’lishga misollar
a) $\frac{3+2i}{1-i}$
b) $\frac{5+4i}{2+i}$
c) $\frac{7-i}{3-2i}$
4. Modul va qarama-qarshi son
a) $z = 3 + 4i \rightarrow |z|\ va\ \bar{z}$ ni toping.

b) $z = -2 + 5i \ \rightarrow \ |z| \ va \ \bar{z}$ ni toping.

c) $z = 6 - 4i \ \rightarrow \ z \cdot \bar{z}$ ni toping.

5. Murakkabroq (aralash) misollar

a) Agar $z_1 = 2 + 3i, \ z_2 = 4 - 4i \ \ bo'lsa, z_1 \cdot z_2 \ ni \ toping.$

b) Agar $z_1 = 5 + 2i, \ bo'lsa, \frac{z_1}{z_2} \ ni \ toping.$