4-mavzu: Haqiqiy sonlar. Irratsional son tushunchasi. Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlar.

Mavzu rejasi:

1. Haqiqiy son

2. Irratsional son

3. Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr

1. Haqiqiy son. Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bu — **son tushunchasi**. Sonlar orqali biz miqdorlarni, o'lchamlarni, vaqtni va boshqa ko'plab fizik yoki abstrakt kattaliklarni ifodalaymiz. Barcha sonlar turli to'plamlarga ajratiladi. Ushbu ma'ruzada **haqiqiy sonlar to'plami** haqida to'liq tushuncha beriladi.

Haqiqiy sonlar — bu **ratsional** va **irratsional sonlar** yig'indisidan tashkil topgan sonlar to'plamidir. Ular sonlar o'qida uzluksiz tarzda joylashgan va ular yordamida deyarli barcha o'lchovlar ifodalanadi.

Haqiqiy sonlar to'plami odatda quyidagicha belgilanadi: R

Bu to'plam quyidagilarni o'z ichiga oladi:

Butun sonlar:

Natural sonlar:

Ratsional sonlar:

Irratsional sonlar:

Haqiqiy sonlarni **sonlar o'qi**da tasavvur qilish mumkin. Har bir nuqtaga haqiqiy son mos keladi. Ratsional sonlar — o'q bo'ylab zich joylashgan, ammo ular sonlar o'qining barcha nuqtalarini to'ldirmaydi. Irratsional sonlar esa shu bo'shliqlarni to'ldiradi.

1-misol: Quyidagi sonlar haqiqiy sonlar to'plamiga tegishlimi?

Sonlar:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\sqrt{2}$

c) -5

d) $\sqrt{-9}$

e) π

Yechimi:

a) $\frac{3}{4}$ –ratsional son, demak, haqiqiy son.

b) $\sqrt{2}$ –irratsional son, lekin haqiqiy son

c) -5 –butun son, ya'ni haqiqiy son

d) $\sqrt{-9}$ –bu kompleks son, haqiqiy son emas

e) π –irratsional son, lekin haqiqiy son.

javob: a, b, c, e — **haqiqiy sonlar**, d — **haqiqiy emas.**

2-misol: Quyidagi sonlarning qaysilari ratsional, qaysilari irratsional?

Sonlar:

a) $\frac{5}{8}$ -ratsional (kasr shakilda)

b) $0.333\ldots$ $\frac{1}{3}$ –ratsional son

c) $\sqrt{3}$ –irratsional son

d) 4.25 $\frac{17}{4}$ –ratsional son

e) π –irratsional son.

Javob:

Ratsional: a, b, d

Irratsional: c, e

3-misol: Sonlar o‘qida $\sqrt{5}$ va 3 sonlari orasida yotuvchi 2 ta haqiqiy son toping.

Yechimi: $\sqrt{5} \approx 2.236 < x < 3,\ x_1 = 2.5,\ x_2 = 2.9.$ Bu sonlar **haqiqiy sonlar** bo‘lib, ko‘rsatilgan oraliqda joylashgan.

Javob: 2.5 va 2.9 — ikkala son ham haqiqiy va berilgan oraliqda.

2. Irratsional son. Irratsional son — bu oddiy kasr (ya’ni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida, bu yerda p∈Z, q∈N, q≠0) ko‘rinishida ifodalanmaydigan haqiqiy sondir.

Boshqacha aytganda, irratsional son — bu cheksiz davrsiz onlik kasr ko‘rinishidagi son.

Irratsional sonlar tushunchasi qadimgi yunon matematiklariga, xususan, **Pifagor** maktabiga borib taqaladi. Dastlab ular barcha sonlarni ratsional deb o‘ylagan. Ammo $\sqrt{2}$ sonining ratsional emasligi isbotlangach, irratsional son tushunchasi paydo bo‘lgan.

Irratsional sonlarning xossalari

1) Kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi

Ya’ni ular $\frac{p}{q}$ ko‘rinishda bo‘lmaydi.

2) Cheksiz va davrsiz onlik kasrlar

Ularning onlik yozuvi **hech qachon tugamaydi** va **takrorlanmaydi**.

3) Haqiqiy sonlar to‘plamiga tegishli

Ular R to‘plamiga kiradi, ammo Q ga kirmaydi.

4) Ikki ratsional son orasida joylashishi mumkin

Har bir irratsional son o‘zidan kichik va katta ratsional sonlar oralig‘ida yotadi.

Irratsional sonni qanday aniqlash mumkin?

Kvadrat ildizni tekshirish:

Agar sonning kvadrat ildizi butun son bo‘lmasa (va kasr ko‘rinishida ifodalanmasa), u irratsional bo‘ladi.

Masalan: $\sqrt{9} = 3$ — ratsional, ammo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,… — irratsional.

Onlik kasr shakli:

Agar onlik yozuvi **cheksiz va davrsiz** bo‘lsa — bu irratsional son.

1-misol: Quyidagi sonlar ichidan irratsional sonlarni ajrating.

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{7}$

c) 4,5

d) π

e) 0,666…

Yechish.

a) $\sqrt{3}$ ≈1,732... — **irratsional son** (cheksiz davrsiz kasr)

b) $\frac{5}{7}$ — bu **ratsional son**, chunki kasr ko‘rinishida

c) 4,5=$\frac{9}{2}$ — **ratsional son**

d) π ≈3.14159... — **irratsional son**

e) 0,666… =$\frac{2}{3}$ — **ratsional son.**

Javob: Irratsional sonlar: $\sqrt{3}$, π.

2-misol: Quyidagi ildizli ifodalarning qaysilari irratsional son?

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{9}$

d) $\sqrt{10}$

Yechish:

a) $\sqrt{4}$ =2 — bu **butun son**, demak **ratsional**

b) $\sqrt{5}$ ≈2.236... — **irratsional**

c) $\sqrt{9}$ =3 — bu **butun son**, demak **ratsional**

d) $\sqrt{10}$ ≈3.162... — **irratsional**

Javob: Irratsional sonlar: $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$

3-misol: Sonlar o‘qida $\sqrt{2}$ va $\sqrt{3}$ orasida joylashgan bitta ratsional va bitta irratsional son toping.

Yechish:

$\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$

$1.414 < x < 1.732$

Ratsional son: x=1,5 — oddiy kasrga teng: $\frac{3}{2}$

Irratsional son: Masalan, $x = \sqrt{2,5}$≈1,581

Javob: Ratsional son: 1,5; Irratsional son: $\sqrt{2,5}$.

4-misol: Quyidagi aralash ifodaning irratsional yoki ratsional ekanligini aniqlang:

$x = \sqrt{2} + 3$

Yechish:

$\sqrt{2}$— **irratsional**

3— **ratsional**

Ratsional + irratsional = har doim irratsional

5-misol: Quyidagilarning onlik yozuvini tahlil qiling va irratsional sonni aniqlang.

a) 1.4142135…

b) 2,5

c) 0,272727…

d) $\frac{11}{3}$

Yechish:

a) Cheksiz davrsiz — **irratsional**

b) Tugagan kasr — **ratsional**

c) Cheksiz davrli — **ratsional**

d) Oddiy kasr — **ratsional**

Javob: Irratsional son: a) 1.4142135…

3. Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr

Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr — bu **hech qachon tugamaydigan** va **hech qanday raqam guruhi takrorlanmaydigan** o‘nli kasrdir.

Agar o‘nlik kasr **cheksiz davom etsa**, va **hech bir raqam yoki raqamlar guruhi takrorlanmasa**, u holda bu kasr **davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr** deyiladi.

Bu kasrlar **irratsional sonlarga** mos keladi.

1-misol.

Quyidagi sonlar davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlardir:

$\pi = 3{,}1415926535\ldots$

$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$

$e = 2{,}718281828\ldots$

Ularning o‘nlik yozuvi:

hech qachon tugamaydi,

davriy emas (ya’ni, raqamlar takrorlanmaydi),

aniq kasr ko‘rinishiga keltirib bo‘lmaydi.

Kasr turi	Misol	Xossasi
Davriy cheksiz	$0{,}666\ldots=\frac{2}{3}$	Raqamlar takrorlanadi (davriy)
Davriy bo’lmagan cheksiz	$\pi \approx 3{,}141592\ldots$	Hech qanday davr yoq

Shunday qilib, **davriy cheksiz kasrlar** — bu **ratsional**,

davriy bo‘lmagan cheksiz kasrlar — bu **irratsional** sonlardir.

Xossalari

Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlarning xossalari:

Cheksiz davom etadi — raqamlar tugamaydi.

Hech qanday davrga ega emas — raqamlar takrorlanmaydi.

Irratsional sonni ifodalaydi.

Oddiy kasr ko‘rinishiga keltirib bo‘lmaydi.

2-misol: 0.123456789...

Yechish.

Bu kasrda raqamlar davom etadi va hech qanday davri yo‘q. Buni ifodalashda uning qiyinchiliklari:

Kasrning o‘nlik qismi hech qachon takrorlanmaydi, shu sababli uni to‘liq ifodalash yoki tartibga solish mumkin emas.

Kasrning raqamlari har doim o‘zgarib turadi.

3-misol: 0.33333...

Bu kasrni oddiy ravishda yozish mumkin:

$0{,}3333\ldots = \frac{1}{3}$

Bu kasrda raqam 3 cheksiz marta takrorlanadi, ya'ni bu — **davriy** o‘nli kasr.

4-misol: 0.128392174...

Bu kasrda ham davrga kiruvchi ketma-ketliklar yo‘q va bu davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrga misol bo‘ladi.

Yechish yo‘llari:

Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlarni **sonlar qatorida** yoki **limit usuli** yordamida ifodalash mumkin. Bu usulda biz kasrni aniq o‘lchab yoki cheksiz qismni matematik formulalar yordamida ta'riflaymiz.

5-misol:

Kasr:

π=3.1415926535...

Tushuntirish:

Bu sonning o‘nlik qismida hech qanday davr yo‘q. Bu — **irratsional son**, ya’ni **davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr**.

6-misol:

Kasr:

$\sqrt{2}$=1.4142135623...

Tushuntirish:

Bu sonni oddiy kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi, o‘nlik qismining raqamlari hech qachon takrorlanmaydi. Bu ham **davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr**dir.

7-misol:

Kasr:

e=2.7182818284...

(e—matematik turg‘un son, natural logarifmlarning asosi)

Tushuntirish:

Bu ham **davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr**. U ham **irratsional son** hisoblanadi.

8-misol:

Kasr:

0.101001000100001...

Tushuntirish:

Bu son o‘z ichida tartibga solingan ko‘rinishda o‘sib boradi (1 va 0 lar soni o‘zgarib turadi), lekin **hech qachon davrga aylanmaydi**, demak bu ham **davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr**dir.

Davriy kasr bilan farqini ko‘rsatish:

Masalan:

$0{,}121212\ldots = \frac{12}{99}$

Bu **davriy** o‘nli kasr. Chunki 12 takrorlanmoqda. Bu **irratsional emas**, ya'ni oddiy kasrga aylantiriladi.

Son	Cheksizmi	Davri bormi	Kasr turi
π	Ha	Yoq	Davriy bo‘lmagan cheksiz
$\sqrt{2}$	Ha	Yoq	Davriy bo‘lmagan cheksiz
$\frac{1}{3}$	Ha	Ha	Davriy kasr
0,101001...	Ha	Yoq	Davriy bo‘lmagan cheksiz