4-MAVZU: Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar. Irratsional son tushunchasi. Davriy bo’lmagan cheksiz o’nli kasr.

Mavzu rejasi:

1. Haqiqiy sonlar.
2. Irratsional son tushunchasi.
3. Davriy bo’lmagan cheksiz o’nli kasr.

1. Haqiqiy sonlar

Barcha ratsional va irratsional sonlar birgalikta *haqiqiy sonlar* deyiladi.

Haqiqiy sonlar — bu matematikada rationallar (ya'ni, butun va kasr sonlar) va irratsionallarni o'z ichiga olgan barcha sonlar to'plamidir. Haqiqiy sonlar to'plami real sonlar deb ham ataladi va quyidagi sonlar turkumini o'z ichiga oladi:

Butun sonlar (masalan, -3, 0, 7)

Kasr sonlar (masalan, 1/2, 3/4)

Irratsionallar (masalan, √2, π, e)

Haqiqiy sonlarning o'ziga xos xususiyati shundaki, ular to'g'ri chiziqda joylashgan va har qanday haqiqiy sonni aniqlash mumkin. Ular raqamli chiziqda, ya'ni haqiqiy o'qlar bo'ylab joylashadi.

Haqiqiy sonlarning ba'zi xususiyatlari:

Har qanday haqiqiy sonni aniqlash mumkin va ular chiziq bo'ylab uzluksizdir.

Haqiqiy sonlarning ustida arifmetik amallarni bajarish mumkin (masalan, qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish).

Har bir haqiqiy son o'zining ikkita qo'shimcha raqamlariga ega bo'lib, ular kasr shaklida ifodalangan bo'lishi mumkin.

Haqiqiy sonlar to'plami, o'z navbatida, **irratsionallar** va **ratsional** kabi kichik to'plamlarga bo'linadi:

Ratsionallar: Bu sonlar butun sonlar va kasr shaklida yoziladigan sonlar. Masalan, 1/3, -5, 6.4.

Irratsionallar: Bu sonlar, kasr shaklida ifodalangan bo'lmaydi.

Masalan, π, √2.

Demak, haqiqiy sonlar to'plami matematikada eng keng tarqalgan va oddiy tushuncha bo'lib, ko'plab hisoblash va tasavvur qilish amallarida qo'llaniladi.

Haqiqiy Sonlar To'plamining Xususiyatlari

a. Uzluksizlik

Haqiqiy sonlar to'plami uzluksizdir. Ya'ni, haqiqiy sonlar o'rtasida hech qanday bo'shliq yo'q. Agar biz biron bir haqiqiy sonni tanlasak, unga juda yaqin boshqa haqiqiy sonni topish mumkin.

Masalan, 1 va 2 o'rtasidagi barcha haqiqiy sonlar (masalan, 1.5, 1.01, √2 va h.k.) ular o'rtasida mavjud. Haqiqiy sonlar chiziq bo'ylab uzluksiz tarqalgan.

b. To'liq bo'lish

Haqiqiy sonlar to'plami to'liq (kompleks) to'plamdir. Bu, har qanday real sonli ketma-ketlik (masalan, o'nlik kasrlar ketma-ketligi) mavjud bo'lsa, bu ketma-ketlikning chegarasi ham haqiqiy son bo'ladi.

c. Tartiblash

Haqiqiy sonlar to'plami tartiblangan to'plamdir. Ya'ni, har qanday ikkita haqiqiy sonni solishtirib, ulardan qaysi biri katta yoki kichik ekanligini aniqlash mumkin. Masalan, $2 > 1$ va $-3 < 0$.

d. Haqiqiy sonlar va to'rt Amali

Haqiqiy sonlar ustida quyidagi to'rt arifmetik amallarni bajarish mumkin:

Qo'shish: $a+b$, har qanday haqiqiy sonlar a va b ning qo'shilishi yana haqiqiy son bo'ladi.

Ayirish: $a-b$, haqiqiy sonlar ustida ayirish ham haqiqiy sonni beradi.

Ko'paytirish: $a \times b$, haqiqiy sonlar ustida ko'paytirish natijasi ham haqiqiy son bo'ladi.

Bo'lish: a/b (agar $b \neq 0$), haqiqiy sonlar ustida bo'lish amali ham haqiqiy sonni beradi.

Haqiqiy sonlarning hisoblashda Qo'llanilishi

Haqiqiy sonlar turli sohalarda, xususan, analitik geometriya, fizika, iqtisodiyot, statistika va boshqa sohalarda muhim ahamiyatga ega. Ular quyidagi amallarda qo'llaniladi:

Chiziqli algebra va geometriya: Haqiqiy sonlar vektorlar, koordinatalar, va tekisliklar kabi tushunchalarni ifodalashda ishlatiladi.

Hisoblash matematika: Haqiqiy sonlar o'nlik kasr, ildizlar, eksponentlar va logarifmlar kabi hisoblashlarda keng qo'llaniladi.

Iqtisodiyot va moliya: Haqiqiy sonlar iqtisodiy modellarda, foiz hisoblashda, o'sish modellari va qimmatli qog'ozlar baholarini hisoblashda ishlatiladi.

Fizika: Haqiqiy sonlar o'lchovlar, vaqt, tezlik, kuch va boshqa fizik kattaliklarni ifodalashda ishlatiladi.

Haqiqiy sonlar to’plami R orqali belgilanadi. Manfiy va musbat haqiqiy sonlar to’plamlarini mos ravishda R_-, R_+ lar bilan belgilab, $R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$ tenglikka ega bo’lamiz.

Haqiqiy sonlar matematikada eng keng tarqalgan va asosiy tushunchalardan biridir. Ular butun sonlar, kasr sonlar, irratsionallar va boshqa turlarga bo'linib, keng qamrovli va uzluksiz matematik operatsiyalarni bajarishda ishlatiladi. Ularning to'plami, shuningdek, turli matematik nazariyalar va modellarni yaratishda asosiy element bo'lib xizmat qiladi.

2. Irratsional son tushunchasi. Qisqarmas kasr shaklida ifodalab bo’lmaydigan sonlar, ya’ni irratsional sonlar ham uchraydi.

Irratsional son — bu kasr shaklida ifodalanmaydigan haqiqiy sonlardir. Ya'ni, irratsional sonlar biror butun sonlar va kasr shaklida yozilmaydi. Boshqacha aytganda, irratsional sonlar o'nlik kasr sifatida tugallanmagan va davomli kasrlar (ya'ni, qaytarilmas va qirqilmas) bo'ladi.

Irratsional sonlarni aniq ifodalash uchun ular ko'pincha ildizlar yoki noaniq o'nlik kasr shaklida beriladi.

Masalan:

√2 (kvadrat ildiz 2) — bu irratsional son bo'lib, uning o'nlik kasr shakli davomiy, ya'ni 1.414213... deb davom etadi va hech qachon to'liq ifodalanmaydi.

π (pi) — bu ham irratsional son, u 3.14159... shaklida boshlanadi va davom etadi, lekin hech qachon to'liq ifodalangan o'nlik kasrga ega bo'lmaydi.

Irratsional Sonlarning Xususiyatlari:

Kasr shaklida ifodalangan emas: Irratsional sonlar hech qachon p/q shaklida yozilmaydi, bu yerda p va q butun sonlar bo'lib, $q \neq 0$. Bu, irratsional sonlarni ta'riflaydi va ular kasr shaklida aniq ifodalangan emas.

O'nlik kasr davomiyligi: Irratsional sonlarning o'nlik kasrlarida raqamlar davom etadi va ular hech qachon to'liq qaytarilmaydi. Masalan, $\pi = 3.1415926535...$ va bu raqamlar hech qachon to'liq takrorlanmaydi.

Algebraik va transsendental irratsional sonlar:

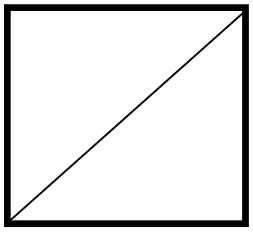
Algebraik irratsional sonlar — bu sonlar ba'zi polinomning ildizlari sifatida ifodalanadi, lekin ular kasr shaklida ifodalangan emas. Masalan, $\sqrt{2}$ soni $x^2-2=0$ polinomining ildizidir.

Transsendental irratsional sonlar — bu sonlar hech qanday polinomning ildizi bo'lmaydi. Masalan, π va e (Euler soni) transsendental irratsional sonlardir. Ular algebraik emas, chunki ular polinomlarning ildizlari sifatida ifodalangan bo'lmaydi.

Irratsional sonlarning kiritilishi:

Irratsional sonlar arifmetik va geometriya amallarida katta ahamiyatga ega. Misol uchun, doiraning yuzasini hisoblashda π irratsional soni ishlatiladi, shuningdek, kvadrat ildizlar va logarifmlar ko'plab ilmiy sohalarda irratsional sonlar bilan ishlaydi.

1-misol. Tomoni 1 ga teng bo’gan kvadratning *d* diogonali hech qanday ratsional son bilan ifodalanmasligini isbot etamiz.



Isbot. Pifagor teoremasiga muvofiq $d^2 = 1^2+1^2 = 2$.

Diagonalni $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr ko'rinishida yozish mumkin, deb faraz qilaylik. U holda $(\frac{m}{n})^2 = 2$ yoki $m^2 = 2n^2$. Bunga ko'ra m- juft son, $m= 2k$. Shuningdek, $(2k)^2 = 2n^2$ yoki $2k = n$, ya'ni n ham juft son. $\frac{m}{n}$ kasrning surat va maxraji 2 ga qisqarmoqda, bu esa qilingan farazga zid. Demak, d ning uzunligi, ya'ni $\sqrt{2}$ soni ratsional son emas.

2-misol. 0,1010010001000001000001... soni irratsional son ekanligini isbotlang (birinchi birdan keyin bitta nol, ikkinchi birdan keyin ikkita nol va hokazo).

Isbot. Berilgan kasr davriy va uning davri n ta raqamdan iborat deb faraz qilaylik (teskari faraz). $2n + 1$ –birni tanlaymiz. Bu birda keyin $2n + 1$ ta ketma-ket nollar keladi:

$$\underbrace{...100...0}_{n\,ta}\ \boxed{0}\ \ \underbrace{0...001...}_{n\,ta}$$

Shu o'rtada turgan 0 ni qaraymiz. Bu nol biror davrning yo boshida, yoki ichida, yoki oxirida keladi. Bu hollarning hammasida bu davr ajratilgan hollardan tuzilgan "kesma" da to'la joylashadi. Demak, davr faqat nollardan tuzilgan. Bunday bo'lishi esa sonning tuzilishiga zid. Demak, qilinga faraz noto'g'ri. Misol uchun:

3. Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr.

Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr — bu o'nli kasr bo'lib, uning kasr qismi hech qanday takrorlanadigan raqamlar ketma-ketligi mavjud emas. Bunday kasrlar o'nli sistemada ifodalanadi va ularda kasr qismi cheksiz bo'ladi, lekin undagi raqamlar bir xil ketma-ketlikda takrorlanmaydi.

Masalan, 1/3=0.33333... tarzidagi kasr, bu yerda raqamlar cheksiz davom etadi va bir xil raqam (3) takrorlanadi, demak bu davriy o'nli kasr. Biroq, davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrda esa, raqamlar takrorlanmaydi.

Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlar, odatda, irratsional kasrlar deb ataladi. Bu kasrlar qandaydir oddiy sonlar bilan ifodalanmaydi va ularda o'zgaruvchan o'nli raqamlar ketma-ketligi bo'ladi. Misol uchun,

π=3.14159265358979... yoki $\sqrt{2}$=1.41421356237... kabi kasrlar cheksiz o'nli va davriy bo'lmagan kasrlar hisoblanadi.

Matematika fanining eng qiziqarli va muhim bo'limlaridan biri bu o'nli kasrlar bilan bog'liq hisoblashlar va ularning turlari. O'nli kasrlar ikki turga bo'linadi: **davriy** va **davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlar**. Bu ma'ruzada biz davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlarni ko'rib chiqamiz. Ular matematikada irratsional sonlar sifatida qaraladi va o'ziga xos xususiyatlarga ega.

Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlarning ta'rifi:

Davriy bo'lmagan cheksiz o’nli kasrlar – bu o’nli kasrlar bo'lib, ularning kasr qismlarida takrorlanuvchi raqamlar yo'q. Bunday kasrlar cheksiz davom etadi, ammo ularning raqamlari tasodifiy ravishda joylashgan bo'lib, ular bir xil tartibda takrorlanmaydi.

Boshqa so'z bilan aytganda, bunday kasrlar nafaqat cheksiz, balki ulardagi raqamlar ketma-ketligi tartibsiz va doimiy ravishda o'zgaradi. Shuning uchun ularni yozishda faqat tasodifiy raqamlar ketma-ketligi ko'rsatiladi.

2. Irratsional sonlar va ularning o'nli ifodasi:

Davriy bo'lmagan cheksiz o’nli kasrlarning ko'pi irratsional sonlardir. Irratsional sonlar oddiy butun yoki kasr sonlar bilan ifodalanmaydi. Ularning kasr qismi cheksiz o’nli bo'lib, takrorlanmaydi.

Masalan:

π=3.14159265358979...

e=2.7182818284590...

Bu sonlar cheksiz o’nli kasrlar bo'lib, ularning raqamlar ketma-ketligi bir xil tartibda takrorlanmaydi. Ular matematikada, fizikada va boshqa sohalarda keng qo'llaniladi.

Davriy bo'lmagan cheksiz o’nli kasrlarning xususiyatlari:

Cheksizlik: Davriy bo'lmagan cheksiz o’nli kasrlar o'nli tizimda yozilganida, ularning kasr qismi cheksiz davom etadi.

Takrorlanmaslik: Bunday kasrlarning kasr qismidagi raqamlar doimiy ravishda o'zgarib turadi va ular bir xil ketma-ketlikda takrorlanmaydi. Bu ular bilan ishlashni qiyinlashtiradi, chunki raqamlar o'zgarmoqda bo'ladi.

Irratsionallik: Davriy bo'lmagan cheksiz o’nli kasrlar irratsional sonlarni ifodalaydi. Bunday sonlar boshqa oddiy sonlar yoki kasrlar yordamida ifodalanmaydi.

Davriy bo’lmagan cheksiz o’nli kasrlarning matematikasi:

Davriy bo'lmagan cheksiz o’nli kasrlar matematikada juda muhim o’rin tutadi. Ular ko’pincha irratsional sonlar bilan bog’liq bo'lib, geometrik hisoblashlar, analiz va boshqa ko'plab sohalarda ishlatiladi.

Masalan, π soni doira yuzasining diametriga nisbatan uzunliklarini hisoblashda qo'llaniladi. *e* soni esa eksponentlar va logarifmalar bilan bog’liq bo’lib, hisoblashlar va matematik modellashtirishda ishlatiladi.

Sonlarning ildiz ishorasi orqali yozilishi ularning kattaligini aniq bilishga yetarli emas. Masalan, hisoblashlarsiz $\sqrt{2}$ va $\sqrt[3]{3}$ lardan qaysi birining kattaligini aytish qiyin. Bu holda $\sqrt{2}$ = 1,4142... kabi *davriy bo’lmagan cheksiz o’nli kasr* ko’rinishdagi yozuv oydinlik kiritadi, lekin hisoblashlarni qiyinlashtiradi. Shunga ko’ra irratsional sonni unga yaqin ratsional son orqali taqribiy ifodalashga harakat qilinadi. Chunonchi:

a irratsional sonni undan kichik a_1 (quyi chegara) va undan katta a_2 (yuqori chegara) ratsional sonlar orqali $a_1<a<a_2$ ko'rinisha yozish. Bu holda vujudga keladigan xato $\varepsilon \le |a_2 - a_1|$ dan oshmaydi.

Masalan, $1,41<\sqrt{2}<1,42$, $\varepsilon \le |1,42 - 1,41| = 0,01$;

Ba'zan a uchun $a=(a_2+a_1)/2$, o'rta qiymat olinadi, $a \approx a$. O'rta qiymatdagi *absolut xato* $\Delta a \le (a_2-a_1)/2$, irratsional son esa $a \approx a \pm \Delta a$ ko'rinishida yoziladi. Masalan, $1,41<\sqrt{2}<1,42$ bo'lgani uchun

$\sqrt{2}=\frac{1,42+1,41}{2}=1,415$, $\Delta=\frac{1,42-1,41}{2}=0,005$

Shunga ko'ra $\sqrt{2}\approx 1,415 \pm 0,005$. Sonni yaxlitlashdan vujudga keladigan haqiqiy xato qoldirilayotgan raqam xonasi 1 birligidan oshmaydi. $\sqrt{2}\approx 1,42$ taqribiy son xatosi ε = 1,4142... -1,42 = -0,0057 ≈ $-0,6\cdot 10^{-2}$.

$1,41<\sqrt{2}<1,42$ bo'lganidan $\sqrt{2}$ ning (1,41; 1,42) dan olinadigan qiymatlar to'plami *chegaralangan*dir. Shu kabi, uzunligi C ga teng bo'lgan aylana ichiga chizilgan barcha qavariq *n*-burchaklarning $p = p_n$ perimetrlari C dan kichik, ya'ni $P=\{p|\ p = p_n,\ n = 3, 4, 5, ..., p_n < C\}$ to'plam chegaralangan va son ko'rinishida beriladi.

3-Misol. π soni kattami yoki $\sqrt{10}$ mi ?

Yechish. Masala π = 3,14159... va $\sqrt{10}$ = 3,16227... sonlarining mos xonalari raqamlarini (o'nli yaqinlashishlarini) taqqoslash orqali hal bo'ladi. Ularning butun qismlari va o'ndan birlar xonasi raqamlari bir xil, lekin 0,01 lar xonasi raqami $\sqrt{10}$ da katta. Demak, $\pi<\sqrt{10}$.

4-misol. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ – irratsional son ekanligini isbotlang.

Isbot. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ratsional son deb faraz qilaylik, ya'ni $\sqrt{2}+\sqrt{5} = r, r \in Q$.

$\sqrt{5} = r - \sqrt{2} \Rightarrow 5 = r^2 - 2\sqrt{2}\,r + 2 \Rightarrow 3 = r^2 - 2\sqrt{2}\,r \Rightarrow r^2 - 3 = 2\sqrt{2}\,r \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r^2-3}{2r} \in Q$.

Lekin $\sqrt{2}$ ratsional songa tegishli emas. Zidlik hosil bo'ldi. Faraz noto'g'ri. Demak, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irratsional son.