2-mavzu: Son tushunchasini kengaytirish masalasi.

Mavzu rejasi: 1. Kasr va manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqidagi qisqacha tarixiy ma’lumotlar.

2. Butun sonlar: Butun manfiy sonlar.

3. Butun sonlar to’plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi.

1. Kasr va manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqidagi qisqacha tarixiy ma’lumotlar.

Kasr va manfiy sonlar matematikada asosiy tushunchalardan biri bo'lib, ular qadimgi zamonlarda yaratilgan va rivojlangan. Ularning kelib chiqishi va rivojlanish tarixini o'rganish matematikaning evolyutsiyasi haqida keng tasavvurga ega bo'lishga yordam beradi. O’quvchilarning kasr sonlar bilan dastlabki tanishuvi boshlang’ich sinflarda boshlanadi. Keyinchalik o’rta sinflarda, kasr tushunchasi aniqlashtiriladi va kengaytiriladi. Shuning uchun boshlang’ich sinf o’qituvchisi kasr va ratsional sonlar ta’rifini, ratsional sonlar ustida amallar bajarish qoidasini va bu amallar qonunlarini bilishi zarur, shuningdek, ratsional va haqiqiy sonlar to’plamlari bilan natural sonlar to’plamining o’zaro bog’liqligini ko’ra bilishi kerak. Bu boshlang’ich va o’rta sinflarda matematikani ketma-ket o’rganish uchun zarurdir.

Quyida kasr va manfiy sonlar haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar va savollar-javoblar shaklida tuzilgan ma'lumotlar keltirilgan:

Savol: **Kasr sonlarining paydo bo'lishi haqida qisqacha ma’lumot bering**

Javob: Kasr sonlari qadimgi misrliklar tomonidan miloddan avvalgi 1800-yillarda paydo bo'lgan. Misrda hisoblashda kasrlar juda keng tarqalgan bo'lib, ular to'liq sonlar bo'linmalarini ifodalash uchun ishlatilgan. Misrliklar har bir kasrni, oddiy sonlar ko'paytmasi yoki oddiy kasrlar yordamida ifodalashgan. Ular kasrlarni yozish uchun **birlik kasrlar** (ya'ni, 1/n shaklida)dan foydalangan.

Masalan, Misr papiruslarida kasrlar turli shakllarda ifodalangan, masalan:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ kabi kasr sonlar ishlatilgan.

Savol 2: Kasr sonlarning tarixdagi rivojlanishi qanday bo’lgan?

Javob: Kasrlar qadimgi Hindiston va Gretsiya davrlarida ham rivojlangan. Hind matematiklari miloddan avvalgi 500-yillarda kasrlarni to'liq sonlar bilan bo'linadigan sonlar sifatida ishlatganlar. Grek matematiklari esa kasrlarni geometriya va hisob-kitoblarda qo'llaganlar. Yunonistonlik matematiklar kasrlarni simvolik yozuvlar yordamida ifodalaganlar, masalan, $\frac{a}{b}$. O'rta asrlarda Islom olamida matematikalar kasrlarni yanada rivojlantirganlar. Ular kasrlarni arab raqamlarida va keyinchalik avropaliklar tomonidan ham ishlatishga olib kelganlar.

Savol 3: Manfiy sonlar qanday paydo bo'lgan?

Javob: Manfiy sonlar qadimgi Xitoy va Hindiston matematiklarida paydo bo'lgan. Xitoyda manfiy sonlar, asosan, hisob-kitoblar va qarzlarni ifodalashda ishlatilgan. Manfiy sonlar **qarzlar** va **xarajatlar** kabi tushunchalar bilan bog'liq bo'lgan. Xitoylik matematiklar miloddan avvalgi 2-3-asrlarda manfiy sonlarni ishlatgan. Hindistonliklar esa manfiy sonlarni **qarzlar** yoki **yo'qotishlar** sifatida ishlatganlar. Hindiston matematikasida manfiy sonlar, ayniqsa, algebraik masalalarda qo'llanilgan. Ammo manfiy sonlar umumiy matematikada keng tarqalgan tushuncha sifatida o'z o'rnini faqat 16-asrda topgan.

Savol 4: Manfiy sonlar Yevropada qanday qabul qilindi?

Javob: Manfiy sonlar Yevropada 16-asrda to'liq qabul qilingan. O'sha davrda, avvalgi matematiklar manfiy sonlarni “imkonsiz sonlar” deb hisoblashgan. Yevropada manfiy sonlar dastlab kredit tizimi va iqtisodiy hisob-kitoblar bilan bog'liq tushunchalar sifatida ishlatilgan. Shuningdek, 17-asrda matematiklar manfiy sonlarni algebra va hisoblashda keng qo'llay boshlaganlar.

Savol 5: Kasr va manfiy sonlarning matematikada ahamiyati qanday?

Javob: Kasr va manfiy sonlar matematikada muhim rol o'ynaydi:

Kasr sonlar bo'linish va nisbatlar kabi tushunchalarni ifodalashda, shuningdek, o'lchovlar va miqdorlar o'rtasidagi munosabatlarni ta'riflashda ishlatiladi.

Manfiy sonlar algebraik operatsiyalar, qarzlar, xatoliklarni va ijobiy-negaiv holatlar o'rtasidagi farqni ifodalashda qo'llaniladi. Ular ko'pincha masalalarni yechishda keng qo'llaniladi, masalan, tenglamalar va vektorlar bilan ishlashda.

2. Butun sonlar: Butun manfiy sonlar.

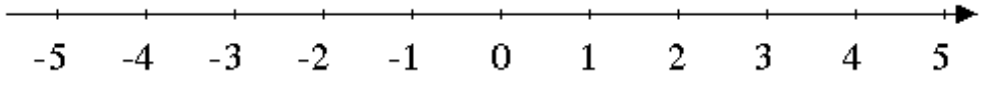
Nol sonini natural sonlar to`plamiga qo`shib, nomanfiy butun sonlar to`plami deb ataladigan yangi sonli to`plam hosil qilamiz. Bu kengaytirilgan to`plam N_0 bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi.

$$N_0 = \{0,1,2,3,4,...,n,...\}$$

Nolni natural sonlar to`plamiga qo`shish natijasida son tushunchasini dastlabki kengaytirish amalga oshirildi.

Butun manfiy sonlar. Nol sonini kiritilishi natijasida teng sonlarni ayirish mumkin bo`ldi. Kichik sondan katta sonni ayirish mumkin bo`lishi uchun sonlar to`plamini yangi sonlar kiritish yo`li bilan kengaytirilgan.

To`g`ri chiziqni olib, unda yo`nalish, O boshlang`ich nuqta va masshtab birligini olamiz (1-chizma).



1-chizma

Boshlang`ich nuqtaga 0 sonini mos qo`yamiz. Boshlang`ich nuqtadan o`ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1,2,3, … natural sonlarni mos qo`yamiz, boshlang`ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga –1, –2, –3, … simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo`yamiz. Bu sonlar butun manfiy sonlar deb ataladi.Butun sonlar orasidagi manfiy sonlar va ularning xususiyatlarini o'rganishga qaratilgan. Bu mavzu butun sonlar to'plamiga kiradigan manfiy sonlarni, ularning amallarini va amaliy masalalarni o'z ichiga oladi. Quyida butun manfiy sonlar haqida misollar va masalalar tuzilgan.

1-misol. Butun manfiy sonni toping:

$-3+(-5)$

Yechim:

$-3+(-5)=-3-5=-8$

Javob: -8.

2-misol: Butun manfiy sonni toping:

-7×4

Yechim:

$-7\times4=-28$

Javob: -28.

3-misol: Butun manfiy sonni toping:

-12\4

Yechim:

-12\4=-3

Javob: -3.

4-misol: Butun manfiy sonni toping:

$(-8)-(-2)$

Yechim:

$(-8)-(-2)=-8+2=-6$

Javob: -6.

1-masala: Oylik to'lovlarni hisoblash.

Bir bank mijozga qarz bergan va mijoz 5 oylik to'lovni amalga oshirgan. Birinchi oyda 1000 so'm, ikkinchi oyda 1200 so'm, uchinchi oyda 800 so'm, to'rtinchi oyda 1000 so'm va beshinchi oyda 1500 so'm to'langan. Endi bankning qarzi necha so'mni tashkil etadi?

Yechim:

Bankning qarzi manfiy bo'lib, har bir to'lovni hisobga olish kerak.

$-1000-1200-800-1000-1500=-5500$

Javob: Bankning qarzi 5500 so'mni tashkil etadi.

2-masala: Kompaniya ishchilariga sarflangan pul.

Bir kompaniya ishchilariga 5 ta qo'shimcha bonus beradi. Birinchi bonus 500000 so'm, ikkinchi bonus 600000 so'm, uchinchi bonus 200000 so'm, to'rtinchi bonus 400000 so'm, beshinchi bonus 300000 so'm. Kompaniya jami necha so'm pul sarfladi?

Yehim:

Jami sarflangan summa:

$-500000+(-600000)+(-200000)+(-400000)+(-300000)=-2000000$

Javob: Kompaniya jami 2000000 so'm chiqim qilgan.

3-masala: Aylanma summani hisoblash

Biror savdogar 3 yil davomida o'z do'konida foyda emas, balki zarar ko'rgan. Birinchi yil zarar -250000 so'm, ikkinchi yil zarar -300000 so'm, uchinchi yil zarar -150000 so'm. Uchinchi yil oxirida umumiy zarar qancha bo'ldi?

Yechim:

Umumiy zararni hisoblaymiz:

$-250000+(-300000)+(-150000)=-700000$

Javob: Umumiy zarar 700000 so'mni tashkil etadi.

4-masala: Qarzlarni hisoblash

Sizning qarzingizda 3 xil miqdorda manfiy sonlar mavjud: 500000 so'm, 1200000 so'm va 800000 so'm. Qarz miqdorini aniqlang.

Yechim:

Jami qarzni hisoblash:

$-500000-1200000-800000=-2500000$

Javob: Qarz miqdori 2500000 so'm.

Topshiriqlar:

Agar -9 ni -3 ga bo'lsangiz, natija qanday bo'ladi?

Butun manfiy sonlar orasida -6, -2, va -8 sonlarini qo'shib, natijani toping.

3. Butun sonlar to’plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi.

Butun sonlar to'plami (Z) ko'plab muhim xossalarga ega. Quyida butun sonlar to'plamining asosiy xossalarini keltiraman:

Yopiq bo'lish:

Butun sonlar to'plami qo'shish va ko'paytirish bo'yicha yopiqdir. Bu degani, agar ikkita butun sonni qo'shsangiz yoki ko'paytirsangiz, natija ham butun son bo'ladi.

1-misol: $3+(-5)=-2$ yoki $4\times6=24$, ikkalasi ham butun sonlardir.

Qo'shish bo'yicha kommutativlik:

Butun sonlar to'plamida qo'shish amali kommutativdir, ya'ni sonlarni tartibda o'zgartirsangiz ham, natija o'zgarmaydi.

2-misol: 5+7=125 + 7 = 125+7=12 va 7+5=127 + 5 = 127+5=12.

Qo'shish bo'yicha assotsiativlik:

Butun sonlar to'plamida qo'shish amali assotsiativdir, ya'ni uchta sonni qo'shishda ular qanday guruhlanishidan qat'i nazar, natija o'zgarmaydi.

3-misol: (2+3)+4=9 va 2+(3+4)=9.

Nol elementining mavjudligi:

Butun sonlar to'plamida 0 son qo'shish bo'yicha neytral elementdir, ya'ni 0 bilan har qanday butun sonni qo'shsangiz, natija o'sha butun son bo'ladi.

4-misol: 5+0=5 va 0+5=5.

Manfiy sonlarning mavjudligi:

Har bir butun son uchun uning teskari (manfiy) soni mavjud. Bu degani, agar siz bir sonni uning manfiy teskari soni bilan qo'shsangiz, natija 0 bo'ladi.

5-misol: 5+(−5)=0.

Ko'paytirish bo'yicha kommutativlik:

Butun sonlar to'plamida ko'paytirish amali kommutativdir, ya'ni sonlarni tartibda o'zgartirsangiz ham, natija o'zgarmaydi.

6-misol: 2×3=6 va 3×2=6.

Ko'paytirish bo'yicha assotsiativlik:

Butun sonlar to'plamida ko'paytirish amali assotsiativdir, ya'ni uchta sonni ko'paytirishda ular qanday guruhlanishidan qat'i nazar, natija o'zgarmaydi.

7-misol: (2×3)×4=2 va 2×(3×4)=2.

Birlik elementining mavjudligi:

Butun sonlar to'plamida 1 son ko'paytirish bo'yicha neytral elementdir, ya'ni 1 bilan har qanday butun sonni ko'paytsangiz, natija o'sha butun son bo'ladi.

8-misol: 5×1=5 va 1×5=5.

No'lining mavjudligi:

Butun sonlar to'plamida 0 son ko'paytirish bo'yicha so'rovchi elementdir, ya'ni 0 bilan har qanday butun sonni ko'paytsangiz, natija 0 bo'ladi.

9-misol: 5×0=0 va 5×0=0.

Butun sonlar to'plamining geometrik interpretatsiyasi. Butun sonlarning geometrik tasvirini o'rganishni taqozo etadi. Butun sonlar to'plami, ya'ni Z geometrik jihatdan, odatda sonlar o'qlarida tasvirlanadi. Har bir butun son Z to'plamidan bir nuqta sifatida qabul qilinadi va ularni xoh ijobiy, xoh manfiy sonlar bo'lsin, sonlar o'qi bo'ylab joylashtirish mumkin. Butun sonlar o'qi bo'ylab amalga oshiriladigan **masofa** hisoblash, **qo'shish**, **ayirish**, **ko'paytirish** va **bo'lish** amallari geometrik tasvir orqali aniq va tushunarli bo'ladi.

Geometrik interpretatsiya haqida umumiy tushuncha:

Musbat butun sonlar: Sonlar o'qi bo'ylab o'ngga joylashgan nuqtalar.

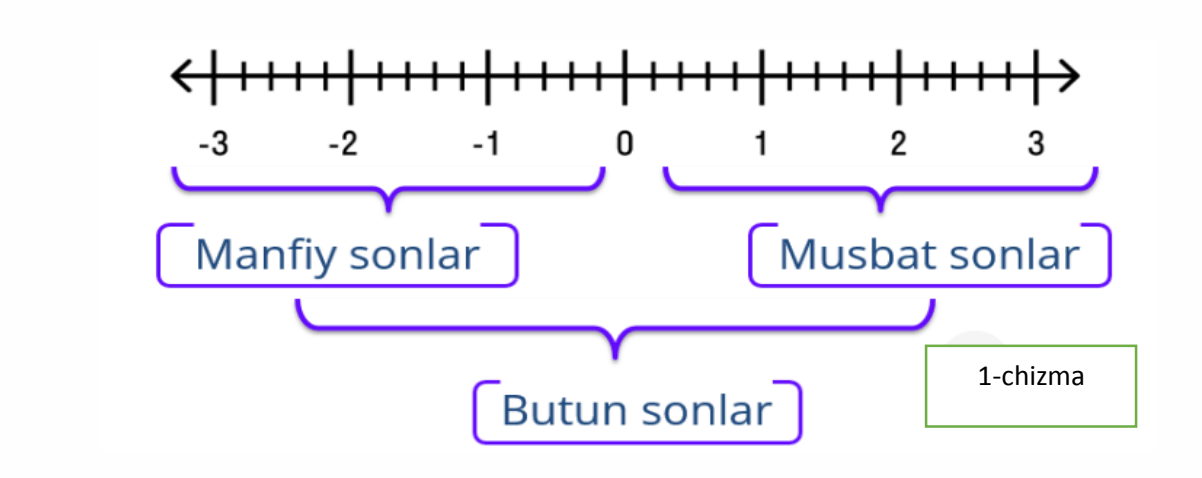
Manfiy butun sonlar: Sonlar o'qi bo'ylab chapga joylashgan nuqtalar.

Nol: Sonlar o'qi bo'ylab markazda, musbat va manfiy sonlar orasida joylashgan nuqta.

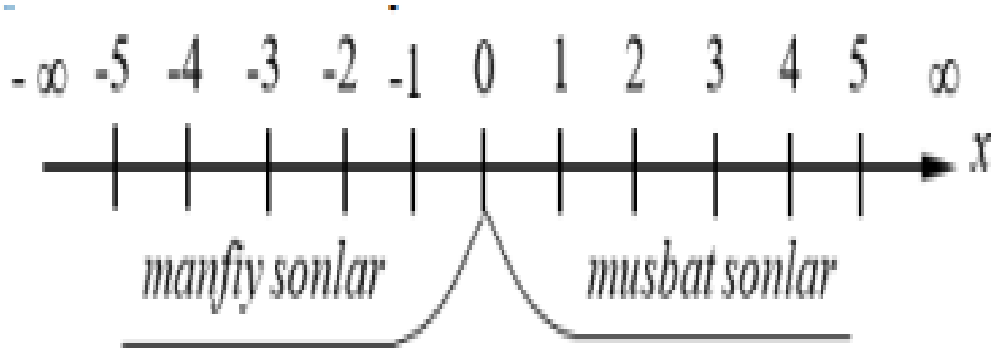
10-misol. Z to'plamda −3,−2, −1, 0, 1, 2, 3 sonlarning geometrik **interpretatsiyasini** tuzing.

−3,−2, −1, 0, 1, 2, 3.

Yechim:



11-misol. Z to'plamda −5, −4, −3,−2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlarning geometrik **interpretatsiyasini** toping.



12-misol: Koordinata tekisligida *X*-o'qi bo'yicha butun sonlar to'plamidagi sonlarni nuqtalar sifatida tasvirlang. 1, 2, 3, ... sonlarini to'g'ri chiziqda qanday joylashtirasiz? Agar −1,−2,−3,... sonlari bo'lsa, ular qanday joylashadi?

Yechish:

0 nuqta boshlang'ich nuqta bo'ladi .

musbat butun sonlar 1,2,3,… *X*-o'qi bo'yicha o'ngga qarab joylashadi.

manfiy butun sonlar −1,−2,−3,… esa *X*-o'qi bo'yicha chapga qarab joylashadi.

Geometrik tasvir: …,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,… va shu tarzda butun sonlar chiziqda joylashadi.

13-misol: Agar bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga 5 birlik masofa borligini bilsangiz, boshlang'ich nuqta 0 deb olsak, oxirgi nuqta qaysi butun sonni ifodalaydi? Agar boshlang'ich nuqta −3 bo'lsa, oxirgi nuqta qanday bo'ladi?

Yechish:

Agar boshlang'ich nuqta 0 bo'lsa, 5 birlik masofa o'ngga qarab +5 ga olib keladi.

Agar boshlang'ich nuqta −3 bo'lsa, 5 birlik masofa o'ngga qarab −3+5=2 bo'ladi.

Geometrik tasvir:

0 dan +5 gacha bo'lgan masofa to'g'ri chiziqda o'ng tomonga qarab 0,1,2,3,4,5 nuqtalarini ifodalaydi.

−3 dan +5 birlik masofa, ya'ni −3,−2,−1, 0, 1, 2 nuqtalarini ifodalaydi.

14-misol: Koordinata tekisligida butun sonlardan iborat chiziqli to'plamni qarang. Sizga 0 dan 10 gacha bo'lgan butun sonlarning orasidan eng katta musbat butun sonni topish kerak.

Yechish:

0 dan 10 gacha bo'lgan musbat butun sonlar to'plami: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

Eng katta musbat son: 10.

Geometrik tasvir: Koordinata tekisligida bu sonlar 0 dan 10 gacha o'ngga qarab ketadigan nuqtalar sifatida joylashadi. Eng katta musbat son 10 oxirgi nuqta sifatida ko'rsatiladi.

15-misol: Bir nuqtadan boshqacha nuqtaga ko'chish uchun qanday butun sonlar orasidan qaysi biri eng kichik masofaga teng bo'lishi mumkin?

Yechish:

Agar boshlang'ich nuqta 2 bo'lsa va oxirgi nuqta −5 bo'lsa, butun sonlarning farqi 2−(−5)=7 bo'ladi.

Agar boshlang'ich nuqta −3 bo'lsa va oxirgi nuqta 1 bo'lsa, butun sonlarning farqi 1−(−3)=4 bo'ladi.

Geometrik tasvir: Butun sonlar orasidagi masofa koordinata tekisligida ularning o'rtasidagi masofani chizish bilan ifodalanadi. Bu masofa nuqtalar orasidagi chiziq uzunligini ko'rsatadi.

16-misol: Agar *x*-o'qi bo'yicha simmetriya mavjud bo'lsa, har bir butun sonning qarama-qarshi (manfiy) soni qanday tasvirlanadi?

Yechish:

Agar x=2, unda uning qarama-qarshi soni −2.

Agar *x*=−4, unda uning qarama-qarshi soni 4.

Bu simmetriya chiziqli koordinatalarda nuqtalar orasidagi aks ettirishni anglatadi.

Geometrik tasvir: Koordinata tekisligida 2 va −2, 4 va −4 nuqtalar o'rtasidagi simmetriya shakllari ko'rsatiladi.

Topshiriqlar.

Topshiriq 1: Koordinata tekisligida X-o'qi bo'yicha butun sonlarni nuqtalar sifatida tasvirlang. Quyidagi butun sonlarni joylashtiring: −4,−2,0,3,5

Topshiriq 2: Koordinata tekisligida A(3) va B(−2) nuqtalari berilgan. Ushbu nuqtalar orasidagi masofani toping.

Topshiriq 3: Koordinata tekisligida *X*-o'qi bo'yicha simmetrik juft butun sonlarni toping. Masalan, agar 4 soni berilgan bo'lsa, uning simmetrik nuqtasi nima bo'ladi? Agar −6 soni berilgan bo'lsa, uning simmetrik nuqtasi qanday bo'ladi?

Topshiriq 4: −3 nuqtasidan boshlang'ich nuqta sifatida 0 ga qarab 7 birlik o'ngga harakat qiling. Natijada qanday butun sonni olasiz?

Topshiriq 5: Koordinata tekisligida A(−8) va B(5) nuqtalari berilgan. Ushbu nuqtalar orasidagi eng katta masofani toping.

Topshiriq 6: Koordinata tekisligida 5 soni bilan 0 ni qo'shish natijasini toping. Bu yerda 0 qanday geometrik xususiyatga ega?

Topshiriq 7: Koordinata tekisligida 4 sonining manfiy teskari sonini toping va uni geometrik ravishda tasvirlang.

Topshiriq 8: Koordinata tekisligida 0 dan 12 gacha bo'lgan butun sonlar orasidan eng kichik musbat sonni toping.

Topshiriq 9: Koordinata tekisligida 666 va −4-4−4 nuqtalarini qo'shing va natijani toping.

Topshiriq 10: Koordinata tekisligida A(3) va B(−7) nuqtalari berilgan. Ushbu nuqtalar orasidagi masofani va ularning farqini toping.