2-Mavzu: Son tushunchasini kengaytirish masalasi.

Reja :

1. Kasr va manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqidagi qisqacha tarixiy ma’lumotlar.

2. Butun manfiy sonlar.

3. Butun sonlar to’plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi.

1. Kasr va manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqidagi qisqacha tarixiy ma’lumotlar.

11 yillik maktab matematika kursidan ma’lumki, natural sonlar va noldan tashqari kasr sonlar, butun sonlar, ratsional sonlar, irratsional sonlar, haqiqiy sonlar mavjud. Sonlarning turli to’plamlari orasidagi o’zaro bog’lanishlarni Eyler doiralari yordamida ko’rgazmali tasvirlash mumkin.

Son tushunchasining kengayishi jarayonidagi dastlabki to’plam natural sonlar to’plami ***N*** bo’ladi. Juda qadim zamonlarda paydo bo’lgan natural son tushunchasi ko’p asrlar davomida kengaydi va umumlashtirildi. Kattaliklarni (miqdorlarni) yanada aniqroq o’lchashga bo’lgan talab musbat kasr sonlar tushunchasiga olib keldi. Manfiy sonlar tushunchasining paydo bo’lishi tenglamalarni yechish va nazariy izlanishlar bilan bog’liq nol avval sonning yo’qligini bildirgan bo’lsa, manfiy sonlarning kiritilishi bilan butun sonlar to’plam Z da hamda ratsional sonlar to’plami Q da teng huquqli songa aylandi.

Bizning eramizgacha V asrda Pifagor maktabida musbat ratsional sonlar kesmalar uzunliklarini aniq o’lchash uchun yetarli emasligi aniqlangan va keyinroq bu muammo hal qilingandan keyin irratsional sonlar paydo bo’ldi, XVI asrda esa o’nli kasrlarning kiritilishi bilan haqiyqiy sonlarga qadam qo’yildi. Haqiqiy sonning qat’iy ta’rifi, haqiqiy sonlar to’plami xossalarining asoslanishi XIX asrda berildi.

Haqiqiy sonlar tushunchasi sonlar qatorining oxirgisi emas. Son tushunchasining kengayishi jarayonini davom ettirish mumkin va u davom etadi — buni fizika, matematika va boshqa fanlarning rivojlanishi taqozo etadi.

O’quvchilarning kasr sonlar bilan dastlabki tanishuvi boshlang’ich sinflarda boshlanadi. Keyinchalik o’rta sinflarda, kasr tushunchasi aniqlashtiriladi va kengaytiriladi. Shuning uchun boshlang’ich sinf o’qituvchisi kasr va ratsional sonlar ta’rifini, ratsional sonlar ustida amallar bajarish qoidasini va bu amallar qonunlarini bilishi zarur, shuningdek, ratsional va haqiqiy sonlar to’plamlari bilan natural sonlar to’plamining o’zaro bog’liqligini ko’ra bilishi kerak. Bu boshlang’ich va o’rta

sinflarda matematikani ketma-ket o’rganish uchun zarurdir.

Natural son va nol tushunchasiking vujudga kelishi tarixi haqida

1, 2, 3, 4, … 100000, … sonlar natural sonlar deb ataladi.

Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. U dastlab amaliy xarakterdagi, keyin esa nazariy xarakterdagi eng sara murakkablashib boruvchi masalalarni yechish jarayonida asta-sekin vujudga kela boshlagan. Turli-tuman chekli to‘plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zarurati kishilarning natural sonlarni yaratishlariga sabab bo‘ldi.

O’zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichdan o‘tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to‘plamlarni taqqoslash uchun berilgan to‘plamlar orasida yoki to‘plamlardan biri bilan ikkinchi to‘plamning qism to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatishgan, ya’ni bu bosqichda kishilar buyumlar to‘plamining sanog‘ini ularni sanamasdan idrok qilganlar. Masalan, beshta buyumdan iborat gruppaning sanog‘i haqida «Qo‘lda nechta barmoq bo‘lsa, shuncha», yigirmata buyumdan iborat to‘plamning sanog‘i **haqida hamda** qancha barmoq bo‘lsa, o‘shancha» deb atashgan. Bunday metod shunday kamchilikka ega ediki, bunda taqqoslanuvchi to‘plamlar bir vaqtda ko‘zga ko‘rinadigan bo‘lishi kerak edi.

Juda uzoq rivojlanish davri natijasida kishilar natural sonlarni yaratishning navbatdagi bosqichiga keldilar —to‘plamlarni taqqoslash uchun vositachi to‘plamlarni: mayda toshchalarni, chig‘anoqlarni, barmoqlarni qo‘llanila boshladilar. Bu vositachi to‘plamlar endi natural son tushunchasi kurtaklarini namoyish qila boshlagan bo‘lsada, biroq bu bosqichda ham hali son sanaladigan to‘plamlardan ajralmagan edi: gap umuman son haqida emas, beshta tosh, beshta barmoq haqida borar edi. Vositachi to‘plamlar nomini shu to‘plamlar bilan taqqoslovchi to‘plamning sanog‘ini aniqlashda qo‘llana boshladilar. Masalan, ba’zi qabilalarda beshta elementdan iborat to‘plamlar sanog‘i «qo‘l» so‘zi bilan, 20 ta buyumdan iborat to‘plamning sanog‘i «butun odam» so‘zi bilan belgilangan.

Kishilar vositachi to‘plamlar bilan amallar bajarishni o‘rgangandan keyingina mavjud umumiylikni, masalan, beshta barmoq va beshta olma orasidagi mavjud umumiylikni aniqladilar, ya’ni vositachi to‘plamlar elementlari tabiatidan cheklanish yuz bera boshlashi bilan natural son haqidagi tasavvur vujudga kela boshladi. Bu bosqichda sanashda, masalan, olmani sanashda bitta, ikkita va hokazo olma sanalmay, balki «bir», «ikki», «uch» va hokazo so‘zlarini ishlatib sanay boshladilar. Bu son tushunchasi rivojlanishining eng muhim bosqichi bo‘ldi. Zamonaning eng yirik matematigi N.N.Luzin mana bunday degan edi: «Biz birlik tushunchasini yaratgan (ochgan emas, aynan yaratgan) inson dahosi qarshisida bosh

egishimiz kerak. Son vujudga keldi, u bilan birga matematika vujudga keldi. Son g‘oyasi — mana buyuk fanlardan birining «tarixi nimadan boshlangan».

Vaqt o‘tishi bilan odamlar faqat, sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o‘rganib oldilar. Bu muammolarni hal qilishdagi ko‘pgina qiyinchiliklar qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o‘nli sistemasini va nol tushunchasini yaratish bilan hal qilingan edi. Asta-sekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar ham uyg‘unlasha boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so‘ng sonlar mustaqil ob’ektlar bo‘lib qoldi va ularni matematik ob’ektlar sifatida o‘rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustida amallarni o‘rgana boshlagan fan «arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika qadimgi sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to‘plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga asr o‘rtalarida hind, Arab dunyosi mamlakatlari va O’rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa, evropalik olimlar katta hissa qo‘shdilar.

«Natural son» terminini birinchi bo‘lib rimlik olim A.Boesiy qo‘lladi (taxminan 480—542 yillar).

Hozirgi vaqtda natural sonlarning xossalari, ular ustida amallar matematikaning «sonlar nazariyasi» deb ataluvchi bo‘limida o‘rganiladi.

XIX asrda olimlarning diqqati natural sonning matematik nazariyalarining qurilishi va mantiqiy asoslanishiga qaratilgan edi. Bu nazariyalar natural sonlar bilan hisoblashlar asosida yotadi.

2. Butun manfiy sonlar. Nol sonini natural sonlar to`plamiga qo`shib, nomanfiy butun sonlar to`plami deb ataladigan yangi sonli to`plam hosil qilamiz. Bu kengaytirilgan to`plam N_0 bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi.

$$N_0 = \{0,1,2,3,4,...,n,...\}$$

Nol soni bilan amallar bajarish qoidalarini, ushbu tengliklar ko`rinishida yozish mumkin:

$a+0=a$ (ta’rifga ko`ra), $0+a=a$;

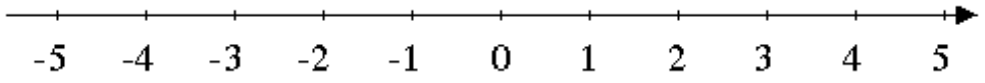
$a-0=a$; $a\cdot 0=0$, $0\cdot a=0$ agar $a\neq 0$ bo`lsa, $0:a=0$.

Nolga bo`lishni alohida qaraymiz. Noldan farqli $a$ son berilgan bo`lsin, ya’ni $a\neq 0$, $a:0$ bo`linma mavjud bo`lsin deb faraz qilaylik; uni b orqali belgilaylik. U holda $a:0=b$ ga ega bo`lamiz, bundan esa quyidagi kelib chiqadi; $a=0\cdot b$ yoki $a=0$ bu esa shartga ziddir. Demak, $a:0$ bo`linmaning mavjudligi haqida qilgan farazimiz noto`g`ri. Shunday qilib, nolga bo`lish mumkin emas.

Nolni natural sonlar to`plamiga qo`shish natijasida son tushunchasini dastlabki kengaytirish amalga oshirildi.

Butun manfiy sonlar. Nol sonini kiritilishi natijasida teng sonlarni ayirish mumkin bo`ldi. Kichik sondan katta sonni ayirish mumkin bo`lishi uchun sonlar to`plamini yangi sonlar kiritish yo`li bilan kengaytirilgan.

To`g`ri chiziqni olib, unda yo`nalish, 0 boshlang`ich nuqta va masshtab birligini olamiz (1-chizma).



1-chizma

Boshlang`ich nuqtaga 0 sonini mos qo`yamiz. Boshlang`ich nuqtadan o`ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1,2,3, … natural sonlarni mos qo`yamiz, boshlang`ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga –1, –2, –3, … simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo`yamiz. Bu sonlar butun manfiy sonlar deb ataladi.

Sonlar belgilangan bu to`g`ri chiziq son o`qi deb ataladi. O`qning strelka bilan ko`rsatilgan yo`nalishi musbat yo`nalish, qarama-qarshi yo`nalishi esa manfiy yo`nalish deb ataladi. Natural sonlar son o`qida boshlang`ich nuqtadan musbat yo`nalishda qo`yiladi, shuning uchun ularni musbat butun sonlar deb ataladi.

Nomanfiy butun sonlar to`plami bilan butun manfiy sonlar to`plamining birlashmasi yangi sonli to`plamni hosil qiladi, bu to`plam butun sonlar to`plami deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi:

$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$

Yuqoridagi 1-chizma butun sonlar to`plamining geometrik ko`rinishini tashkil etadi. Chizmadan ko`rinadiki, har bir butun songa son o`qida aniq nuqta mos keladi, lekin son o`qining har bir nuqtasiga ham butun son mos kelavermaydi.

Natural sonlar to`plamini butun sonlar to`plamiga kengaytirilishini ikkinchi talqini 0-simvoli bilan belgilanadigan nol soni va manfiy butun sonlar quyidagicha kiritiladi:

a) istalgan n- natural son va 0- sonining yig`indisi n sondir.

n+0=n

b) istalgan n natural songa shunday yagona -n - manfiy butun son mos keladiki, n va -n sonlarning yig`indisi nolga teng.

n+(-n)=0

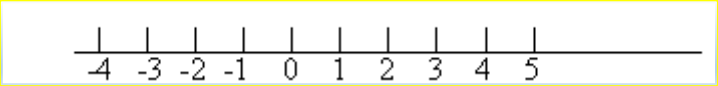
n soni -n songa qarama-qarshi son deb aytiladi. –n soniga qarama-qarshi son n sonidir; $-(-n) = n$.

Natural sonlar to`plamiga yangi ob'yektlarni – nol sonini va manfiy butun sonlarni kiritish natijasida hosil bo`lgan to`plamga butun sonlar to`plami deyiladi.

Butun sonlar to`plamidagi natural sonlar musbat butun sonlar deb ataladi. Barcha butun sonlar to`plami Z bilan belgilanadi. Butun sonlar to`plami tartiblangan to`plamdir, ya'ni istalgan ikkita *m* va *n* butun sonlar uchun quyidagi munosabatlardan biri va faqat biri o`rinlidir.

m=n yoki m<n yoki n<m

Ta'rif. Barcha natural, butun manfiy va nol sonlari birgalikda *butun sonlar* to'plami deyiladi (1-chizma).



2-chizma

Bu erda natural sonlarga nisbatan qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir, masalan, 1 va – 1, 2 va -2, 3 va -3, ...qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir;

Butun sonlar to'plamida faqatgina 0 soniga nisbatan qarama-qarshi bo'lgan son yo'qdir:

0 = 0 + 0

Butun sonlar to'plamida har doim qo'shish, ayirish, ko'paytirish amallarini bajarish o'rinlidir, lekin bo'lish amali har doim bajarilavermaydi. Chunki bir butun sonni ikkinchi butun songa bo'lganda har doim bo'linmada butun son hosil bo'lavermayda.

Masalan,

$7:2 = 3.5,\ 9:4 = 2\frac{1}{4}, \ldots$

Bu yerda hosil qilingan bo'linmadagi

$3{,}5;\ 2\frac{1}{4}, \ldots$

sonlari butun sonlar to'plamida mavjud emas. Umuman olganda $m \cdot x = n$, $m \neq 0$ ko'rinishdagi tenglamaning yechimi butun sonlar to'plamida har doim mavjud emas, bu tenglama har doim $x = \frac{n}{m}$ ko'rinishdagi yechimga ega bo'lishi uchun kasr tushunchasini kiritish orqali butun sonlar to'plamini kengaytirib, unga barcha manfiy va musbat kasr sonlarni qo'shish kerak. Bu degan so'z

$$\left\{-\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q}\right\}$$

ko’rinishdagi ratsional sonlar to’plamini hosil qilish kerak deganidir. Shundagina $m \cdot x = n$ ko’rinishdagi tenglamalar har doim yechimga ega bo’ladi. Bu erda r va q lar natural sonlardir.

Manfiy sonlar tushunchasining paydo bo’lishi tenglamalarni yechish va nazariy izlanishlar bilan bog’liq. Nol avval sonning yoqligini bildirgan bo’lsa, manfiy sonlarning kiritilishi bilan butun sonlar to’plami Z da hamda ratsional sonlar to’plami Q da teng huquqli songa aylandi.

Bizning eramizgacha V asrda Pifagor maktabida musbat ratsional sonlar kesmalar uzunliklarini aniq o’lchash uchun yetarli emasligi ma’lum bo’lgan va keyinroq bu muammo hal qilingandan keyin irratsional sonlar paydo bo’ldi. XVI asrda esa o’nli kasrlarning kiritilishi bilan haqiqiy sonlarga qadam qo’yilgan.

3. Butun sonlar to’plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi.

Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasi odatda raqamlar to’plamining koordinatalariga asoslanadi. Ko’pincha butun sonlar to’plamini bir o’lchovli, koordniatalar bo’yicha joylashgan nuqtalar sifatida tasvirlash mumkin.

Raqamlar to’plami va raqamlar o’qi: Butun sonlarni geometrik jihatdan tasvirlash uchun ularni raqamlar o'qida joylashtirish mumkin. Raqamlar o'qi — bu to'g'ri chiziq bo'lib, uning markazida nol (0) joylashgan va har bir butun son o'qning ma'lum bir nuqtasini ifodalaydi. Musbat butun sonlar o'qning chap tomonidan, manfiy butun sonlar esa o'qning o'ng tomonidan joylashadi.

Geometrik ravishda, bu o'qni quyidagicha tasvirlash mumkin:

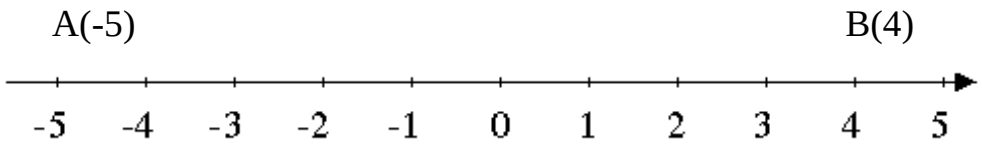
...-3 -2 -1 0 1 2 3 ...

Har bir butun son bu o'qdagi nuqtaga mos keladi.

Qo’shish va ayirish: Butun sonlar to'plamining boshqa bir geometrik interpretatsiyasi bu ularning qo’shishi va ayirishi asosida yaratilgan ketma-ketliklar bo'lishi mumkin. Bu qo’shish va ayirishning ko'rsatilishi shuni anglatadiki, manfiy butun sonlar to'plami o'qning chap tomonida joylashadi, musbat butun sonlar esa o'qning o'ng tomonida. Nol esa bu ikkita qismning markazi bo'lib xizmat qiladi.

Ko'paytirish va bo'lish: Butun sonlarning ko'paytmasini geometrik ravishda o'qda ko’paytirish yoki bo’lish sifatida tasvirlash mumkin. Masalan, musbat butun son bilan ko'paytirish, sonni o'ngga siljitish kabi, manfiy son bilan ko'paytirish esa sonni chapga siljitish sifatida ko'rinadi.

Haqiqiy sonlar to’plami sonlar tushunchasining oxiri emas. Son tushunchasining kengayishi jarayoni davom etishi mumkin va u davom etadi. Buni fizika va matematika, hamda boshqa fanlarning rivojlanishi taqazo etadi. Butun sonlar to’plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi. A(-5), B(4) nuqtalariga mos keluvchi sonni sonlar o’qida topaylik:



Yuqoridagi 1-chizma butun sonlar to`plamining geometrik ko`rinishida tasvirlandi. Chizmadan ko`rinadiki, har bir butun songa son o`qida aniq nuqta mos keladi, lekin son o`qining har bir nuqtasiga ham butun son mos kelavermaydi.

Shuning uchun butun sonlarni sonlar oqida tasvirlash butun sonlarni geometrik interpretatsiyasi deb ataladi.

Butun sonlar to'plami Z juda ko'p matematik xossalar bilan ajralib turadi, va ularning geometrik interpretatsiyasi bizga sonlarning o'zaro munosabatlarini, qo'shish, ayirish, ko'paytirish va taqqoslash operatsiyalarining qanday ishlashini tushunishda yordam beradi. Bu xossalar va ularning geometrik yondoshuvi, matematik analitikada va boshqa sohalarda butun sonlar to'plamining ahamiyatini tushunishga yordam beradi.

Savol va topshiriqlar.

1. Kasr va manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqidagi qisqacha tarixiy ma’lumotlar.
2. Butun sonlar: Butun manfiy sonlar.
3. Butun sonlar to’plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi.