12-MAVZU: Figuralarning yuzasi. Figuralar yuzasini o'lchash usullari.

Mavzu rejasi:

1. Figuralarning yuzasi. Figuralar yuzasini o'lchash usullari.

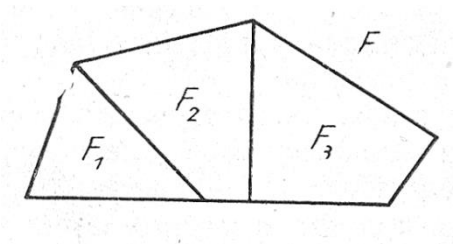
2. Tengdosh va teng figuralardan tashkil topgan figuralar.

3. To'g'ri to'rtburchak va boshqa figuralarning yuzasini topish

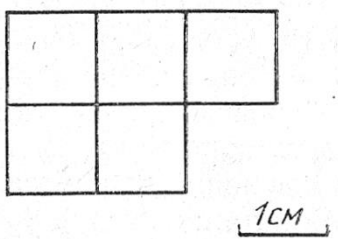
1. Figuralarning yuzi. Figuralar yuzini o'lchash usullari. Xar bir kishi figuraning yuzasi haqida tushunchaga ega: Biz xonaning yuzasi, yer uchastkasining yuzasi, bo'yash kerak bo'lgan sirt yuzasi va boshqalar haqida gapiramiz. Bunda biz agar yer uchastkalari bir xil bo'lsa, ularning yuzalari tengligini, katta uchastkaning yuzasi katta bo'lishini; uyning yuzasi undagi xonalar yuzalarining yig'indisiga tengligini bilamiz.

Yuza haqidagi odatdagi bunday tasavvur geometriyada figuraning yuzasi haqida gapirilganda geometrik ta'riflashda qo'llaniladi. Ammo geometrik figuralar turlicha tuzilgan, shuning uchun yuza haqida gapirilganda figuralar alohida sinflari farq qilinadi. Masalan, ko'p burchak va chegaralangan qavarik figuralar yuzasi yoki doira yuzasi, yoki aylanish jismlarining sirtlari yuzasi qaraladi. Biz faqat ko'pburchak va chegaralangan yassi qavariq figuralar yuzalari haqida gapiramiz. Bunday figura boshqa figuralardan tuzilgan bo'lishi mumkin. Masalan, 1-chizma tasvirlangan F figura F_1, F_2 va F_3 figuralardan tuzilgan. Figura F_1, F_2, . . . , F_n figuralardan tuzilgan (iborat) deyilganda, bu figura F_1, F_2,…F_n figuralarning birlashmasidan iboratligi va berilgan har qanday ikkita figura umumiy ichki nuqtaga ega emasligi ko'zda tutiladi.

Ta'rif. Figuraning yuzasi deb har bir figura uchun quyidagicha aniqlangan nomanfiy kattalikka aytiladi.

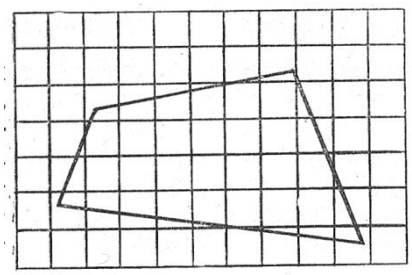


1-chizma



2-chizma

Teng figuralar teng yuzalarga ega. Agar figura chekli sondagi figuralardan tuzilgan bo'lsa, uning yuzasi bu figuralar yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi.



3-chizma

Agar geometrik ta’rifni kesma uzunligining ta’rifi bilan taqqoslasak, yuza ham uzunlik tavsiflangan xossalar bilan tavsiflanganini, biroq ular turli to’plamlarda: uzunlik — kesmalar to’plamida, yuza — yassi figuralar to’plamida berilganini ko’ramiz.

F figuraning yuzini S(F) bilan belgilashni shartlashib olamiz.

Figuraning yuzasini o’lchash uchun yuza birligiga ega bo’lishi kerak. Odatda yuza birligi uchun tomoni birlik kesma e ga, ya’ni uzunlik birligi uchun tanlab olingan kesmaga teng bo’lgan kvadrat yuzasi olinadi. Tomoni e bo’lgan kvadratning yuzasi e^2 bilan belgilanadi. Masalan, birlik kvadrat tomonining uzunligi t bo’lsa, uning yuzi t^2 bo’ladi.

Yuzni o’lchash berilgan figura yuzini birlik kvadrat yuzi e^2 bilan taqqoslashdan iborat. Bu taqqoslashning natijasi $S(F)=xe^2$ ni qanoatlantiruvchi x sondan iborat. x son tanlab olingan birlikda yuzaning son qiymati deyiladi.

Masalan, agar yuza birligi sm^2 bo’lsa, u holda 2-chizmada keltirilgan figuraning yuzasi 5 sm^2 ga teng bo’ladi. Figuralarning yuzalarini o’lchashning ba’zi bir usullarini qarab chiqamiz. Bevosita yuzani aniqlaydigan usullardan biri yuzani paletka yordamida o’lchashdir (paletka —shaffof materialga chizilgan kvadratlar turi).

Yuzasi o’lchanayotgan F figura ustiga tomoni e bo’lgan kvadratlar turi qo’yilgan bo’lsin (3-chizma). U holda bu figuraga nisbatan kvadratlarning ikki turini ko’rsatish mumkin. Butunlay F figura ichida yotadigan kvadratlar, bir qismi F figura ichida, bir qismi uning tashqarisida yotadigan va figura konturi o’tadigan kvadratlar.

Birinchi tur kvadratlar t ta, ikkinchi tur kvadratlar $t+n$ ta bo’lsin. U holda, ravshanki, F figuraning yuzasi $t\cdot e^2<S\ (F)<(t+n)\cdot e^2$ shartni qanoatlantiradi. t va $t+n$ sonlar o’lchanayotgan yuzaning taqribiy son qiymatlari bo’ladi. t—kami bilan olingan, $t+n$ ortg’i bilan olingan taqribiy qiymati.

Ko’rib turibmizki, bunday paletka yordamida F figuraning yuzasini katta aniqlikda o’lchay olmas ekanmiz, aniqroq natija olish uchun paletka kvadratlarini maydaroq qilish kerak, buning uchun dastlabki kvadratlarni maydaroq kvadratlarga bo’lish kerak. Masalan, tomoni $e_1=\frac{1}{10}e$ bo’lgan kvadratlar turini yasash mumkin.

Natijada F figura yuzasining kattaroq aniqlikdagi boshqa taqribiy qiymatini hosil qilamiz.

Bu jarayonni davom ettirish mumkin. Savol tug'iladi, o'lchashning kami bilan olingan har qanday taqribiy qiymatidan katta va ortigi bilan olingan har qanday taqvimiy qiymatidan kichik bo'lgan hamda o'lchanayotgan yuzaning aniq son qiymati bo'la oladigan haqiqiy son mavjudmi? Matematikada yuzaning tanlab olingan birligida har qanday yuza uchun bunday sonning mavjudligi va uning yagonaligi, yuza ta'rifida ko'rsatilgan 1 va 2 xossalarni qanoatlantirishi isbotlangan.

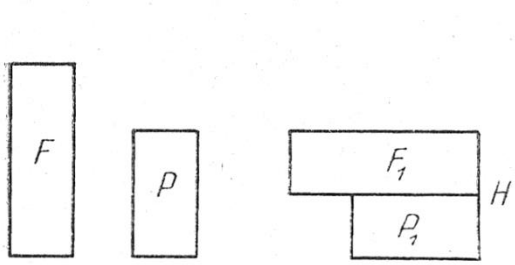
Paletka yordamida figuralarning yuzasini o'lchash usuli qo'llanishda chegaralangan, u uzundan-uzoq ishdir, shuning uchun uncha katta bo'lmagan figuralarning yuzasigina paletka yordamida topiladi. Shu sababli matematikada paletkaning paydo bo'lishi bilan birga figuraga tegishli bo'lgan tomonlar, balandliklar va boshqa kesmalarni o'lchash bilan yuzasini topishning boshqa vositali yo'llari qidirila boshlandi.

Bu yuza ta'rifi va uni o'lchash mohiyatidan yuzalarini taqqoslashning va ular ustida amallar bajarishning ma'lum qoidalari kelib chiqadi. Ulardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz. Agar F_1 figura F_2 figura ichida yotsa, $S(F_1) \leq S(F_2)$ bo'lishini isbotlang. Isbotlashda ta'rifda ifodalangan figura yuzasining xossalaridan foydalaning. 4-chizmada $F=F_1 \cdot P=P \cdot X$ va $S(F)= 3sm^2$, $S(P)=2sm^2$. Yuza xossasidan foydalanib, $S(H)=5sm^2$ ni isbotlang. F figuraning yuzi F_1 va F_2 figuralar yuzalarining yigindisiga teng. Bu, F figura F_1 va F_2 figuralardan tuzilgan degani emasmi? Ikkita uchburchakning yuzlari teng. Bundan ularning tengligi kelib chiqadimi? F_1 figuraning yuzasi F_2 figuraning yuzasidan katta. Bundan F_2 figura butunlay F_1 figura ichida yotishi kelib chiqadimi. F figuraga paletka quyildi va F figura ichida 28 ta birlik kvadratlardan tuzilgan figura yotishi, F figuraning o'zi 35 ta birlik kvadratdan tuzilgan figura ichida yotishi hisoblandi. Berilgan F figuraning son qiymati 27,3 ga teng bo'lishi mumkinmi? 29,6 ga-chi? 32,8 ga-chi? 35,4 ga-chi?

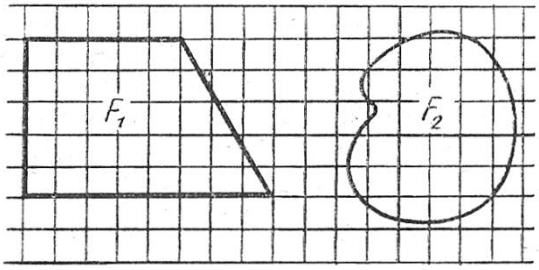
Paletka kvadratlari tomonlarining uzunliklarini: 1) $1sm$; $0{,}5sm$ deb olib, paletka qo'yilgan figuralar yuzalarini toping (5-chizma).

Millimetrli kogozga radiusi $3sm$ bo'lgan doyra chizing va kvadratlar tomonlarining uzunliklarini: 1) $1sm$; 2) $0{,}5sm$; 3) $0{,}1sm$ deb olib, bu doyra yuzasini qo'sh tengsizlik yordamida baholang. $\pi = 3{,}14$ deb olib, $S=\pi r^2$ formula bo'yicha bu doyra yuzini toping.

Quyidagi fikrlar ichidan chin bo'lganlarini ko'rsating:



4-chizma



5-chizma

a) Bitta figura yuzasining son qiymatlari turlicha bo'lishi mumkin.
b) Teng bo'lmagan figuralar yuzlarining son qiymatlari teng bo'lishi mumkin.
c) Teng yuzli figuralar teng.
d) Bir kvadrat detsimetrda 100 kvadrat santimetr bor ekanini isbotlang

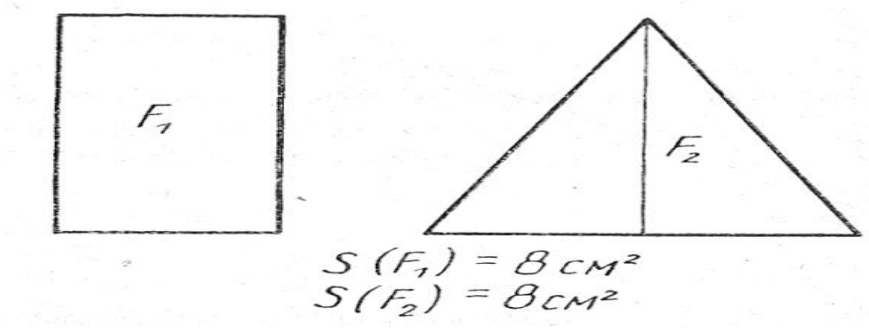
2. Tengdosh va teng figuralardan tashkil topgan figuralar.

Agar figuralar teng bo'lsa, u xolda ular yuzalarining son qiymatlari teng bo'ladi (bir xil yuza birligida).

Yuzalari teng bo'lgan figuralar teng yuzali (tengdosh) figuralar deyiladi. Masalan 6-chizmadagi to'g'ri to'rtburchak va uchburchak teng yuzali figuralardir.

Agar F figura F_1, F_2, ... F_n figuralardan tuzilgan bo'lsa, F figura yuzasining son qiymati F_1, F_2, ... F_n figuralar yuzlari son qiymatlari yig'indisiga teng bo'ladi (bir xil yuza birligida).

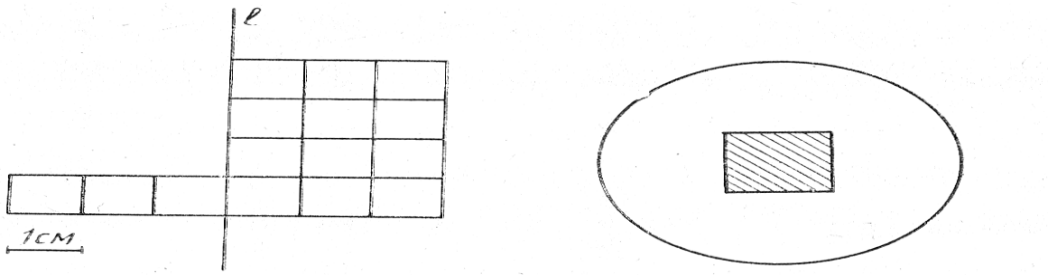
Masalan, 162-rasmda tasvirlangan F figuraning yuzini topaylik.



6-chizma

Yuza birligini almashtirganda yangi birlik eski birlikdan qancha kichik (katta) bo'lsa, yuzaning son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi).

Masalan, $5sm^2$ ni kvadrat detsimetrlarda ifodalaylik. Ma'lumki, $1sm^2=0,01dm^2$ demak, $5sm^2=5\cdot 1sm^2=5\cdot(0,01dm^2)=(5\cdot 0,01)dm^2=0,05dm^2$.



7-chizma

Boshlang'ich sinflarda o'quvchilar figuralarning yuzalari haqidagi dastlabki tushunchalar bilan tanishadilar. Figuraning yuzasi haqidagi tasavvur figuralarni taqqoslash asosida vujudga keladi: kvadrat doyra ichida yotgani uchun (7-chizma) uning yuzasi doiraning yuzasidan kichik, doiraning yuzasi kvadratning yuzasidan katta.

O'quvchilar figuralar yuzalarini paletka yordamida o'lchash bilan tanishadilar (paletka — tomoni 1*sm* bo'lgan kvadratlar turi). O'quvchilar paletkani figura ustiga qo'yib; figura ichida butunlay yotadigan kvadratlar sonini; figura konturi o'tadigan kvadratlar sonini aniqlaydilar. Agar birinchi kvadratlar 26 ta, ikkinchi kvadratlar 18 ta bo'lsa figura konturi o'tadigan kvadratlar soni, ya'ni 18 soni 2 ga bo'linadi va figura ichida butunlay yotadigan kvadratlar soniga qo'shiladi. Natijada berilgan figura yuzasining son qiymati hosil bo'ladi: 26+18:2=26+9=35. Demak, $S(F)=35$ sm^2. Nima uchun hisoblash shunday amalga oshiriladi? $m\cdot F$ figura ichida butunlay yotgan kvadratlar soni, $t\cdot F$ figura konturi o'tadigan kvadratlar soni bo'lsin. U holda $me^2<S(F)<S(t+n)e^2$. F figura yuzasining taqribiy qiymatini topish uchun yuzaning kami va ortig'i bilan olingan son qiymatlarini qo'shish va bu yig'indini teng 2 ga bo'lish yetarli: $S(F)\approx \frac{m+(m+n)}{2} e^2$ Shakl almashtirishlardan keiin topamiz:

$$S(F)\approx \frac{m+(m+n)}{2} e^2=\frac{2m+n}{2}e^{2=(m+\frac{n}{2})}e^2$$

Oxirgi ifoda F figura yuzining takribiy diymati F figuraning ichida butunlay yotadigan kvadratlar soni bilan shu figura konturi o'tadigan kvadratlar soni yarmining yig'indisiga tengligini bildiradi. Biz maktabda o'rganiladigan figura yuzasining taqribiy qiymatini paletka yordamida teng qoidasiga keldik.

3. To'g'ri to'rtburchak va boshqa figuralarning yuzini topish

Boshlang'ich sinf o'quvchilari to'g'ri to'rtburchak yuzasining son qiymatini dastlab bu to'gri to'rtburchak ichida yotadigan birlik kvadratlar sonini sanash bilan yoki paletka yordamida bevosita topadilar, keyin vositali usul bilan to'g'ri to'rtburchak tomonlari uzunliklarining son qiymatlarini ko'paytirish bilan topadilar. AF esa parallelogrammning balandligi $S_{ABCD}=AB\cdot AF$

Demak, parallelogramning yuzasi uning tomonini shu tomonga tushurilgan balandligiga ko'paytirilganiga teng.

1-masala. Agar parallelogramning tomonlari 2m va 3m, burchaklaridan biri esa 70^0 ga teng bo'lsa, uning yuzasini toping .

Berilgan; AB=CD+3m

AD=BC=2m

T.k. S_{ABCD}=?

Yechish: ΔADE dan: $\frac{AE}{AD}$=sin70^o;

AE=2sin70^o; $S_{ABCD} = DC{\cdot}AE$=3·2·sin70^o=6·sin70^o ≈6·0,9397≈5,64m^2

Uchburchakning yuzi. ABC uchburchak berilgan bo'lsin. Bu uchburchakni rasmda ko'rsatilgandek $ABCD$ parallelogramga to'ldiramiz. Parallelogramning yuzasi ABC va BDC uchburchaklar yuzalarining yig'indisiga teng. Bu uchburchaklar teng bo'lgani uchun parallelogramning yuzasi ABC uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng.

S=ΔABC = $\frac{1}{2}$·AC·BE

2 –masala. Tomonlari 8sm va 4sm bo'lgan uchburchakning shu tomonlarga balandliklar o'tkazilgan, 8sm tomoniga o'tkazilgan balandliklar 3sm ga teng. 4sm li tomonga o'tkazilgan balandlik qanchaga teng.

Uchburchak yuzasini hisoblashning bu formulasidan tashqari quyidagi formulalari ham mavjud.

Trapetsiyaning yuzi. $ABCD$ berilgan trapetsiya bo'lsin. AC diagonalni o'tkazamiz. AC diagonal $ABCD$ trapetsiyani ikkita ABC va ACD uchburchakka ajratadi. Trapetsiyaning yuzasi shu uchburchaklar yuzalarining yig'indisiga teng. Uchburchaklarni mos ravishda AE va CF balandliklarini o'tkazamiz. U holda

$S_{AB\,C}$=$\frac{1}{2}$$BC{\cdot}\ AE$

S_{ABC}=$\frac{1}{2}$$AD\cdot CF$+$\frac{1}{2}$$AD{\cdot}CF$=$\frac{(AD+BC)}{2}\cdot CF$

T.k: S_{ABCD}=?

Yechish: Belgilashlar kiritamiz.

ED=x; AE=44-x; CE=h

1) x ni topamiz: ΔACE va ΔCDE lardan: AC^2=AE^2+CE^2; CD^2=ED^2+CE^2

39^2= (44-x)^2+h^2) ⇒ 39^2=(44-x)^2=17^2–x^2 ⇒ 88x=704 ⇒ x=8(m) 17^2=x^2+h^2

2. h ni topamiz: h^2 = 17^2–x^2 = 225⇒ h=15 (m).

Rombning yuzasi. $ABCD$ berilgan romb bo'lsin. AC va DB diagonallarini o'tkazamiz. $ABCD$ rombni ADB va DBC uchburchaklarga ajratamiz. $ABCD$ rombning yuzi ADB va DBC uchburchaklar.

4-masala. Balandligi 10sm, o'tkir burchagi esa 30° ga teng bo'lgan rombning yuzasini toping.

Berilgan :

ABC=30°

T.k. S_{ABC}=? $\underline{CE= h=10sm}$

Yechish:

ΔBEC dan $\frac{EC}{BC}=sin30°$

$BC = \frac{EC}{\sin 30°} = \frac{1}{2} = 20sm$

Demak, $AB=BC=CD=DA=20sm$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot EC = \frac{1}{2} 20 \cdot 10 = 100$ sm^2.

Savol va topshiriqlar

1. $S(F)=34{,}78sm^2$ ekani ma'lum. Agar kvadrat detsimetrlarda hisoblasak, uning yuzasining son qiymati qanday bo'ladi?
2. Oshxonaning yuzi 9m^2. Oshxona poliga yotqizish uchun tomoni $3dm$ bo'lgan kvadrat shaklidagi plitkalardan nechta kerak bo'ladi?
3. To'gri to'rtburchakning yuzasi $12sm^2$ ga teng, uning tomonlari uzunliklari natural sonlar bilan ifodalangan. Bu shart bo'yicha nechta turli to'g'ri to'rtburchak yasash mumkin?
4. To'g'ri to'rtburchakning teng bo'lmagan ikkita tomoni uzunliklari irratsional son bilan ifodalanadi. Bundan bu to'g'ri to'rtburchak yuzasining son qiymati ham irratsional son bo'lishi kelib chiqadimi?
5. Tomonlarining uzunliklari irratsional son bilan ifodalanadigan to'g'ri to'rtburchak tomonlarining uzunliklari ratsional son bilan ifodalanadigan to'g'ri to'rtburchakka tengdosh (teng yuzali) bo'lishi mumkinmi?
6. Agar to'g'ri to'rtburchakning asosi 2 marta orttirilib, balandligi 2 marta kamaytirilsa, to'g'ri to'rtburchakning yuzasi o'zgarmasligini isbotlang.
7. Agar to'g'ri to'rtburchakning asosi 20% orttirilib, balandligi 20% kamaytirilsa, yuqoridagi xulosa to'g'ri bo'ladimi?