10-MAVZU: Aylanma jismlar. Silindir, konus, shar. Fazoviy figuralarni tekislikda tasvirlash.

Mavzu rejasi:

1. Aylanma jismlar.

2. Silindir, konus, shar.

3. Fazoviy figuralarni tekislikda tasvirlash

1. Aylanma jismlar.

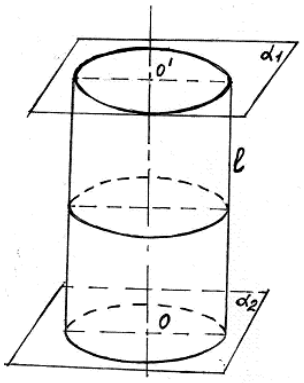
Biror to‘g‘ri chiziqni yoki egri chiziqni bir to‘g‘ri chiziq atrofida aylantirishdan aylanma sirt hosil bo‘ladi.

Agar aylanma sirtni o‘q deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan parallel ikkita tekislik bilan kessak aylanma sirt va doira bilan chegaralangan aylanma jism hosil bo‘ladi

OO_1 - aylanma jismning o‘qi, jismning egri sirti aylanma sirt deyiladi.

Aylanma sirt parallel tekisliklar bilan kesilsa, kesim doiralardan iborat bo‘ladi.

Silindr. O‘q atrofida unga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq aylantirilsa, silindrik sirt hosil bo‘ladi. U o‘qqa perpendikulyar ikkita parallel tekislik bilan kesilsa ular orasida silindrik jism hosil bo‘ladi (1-chizma).



1-chizma

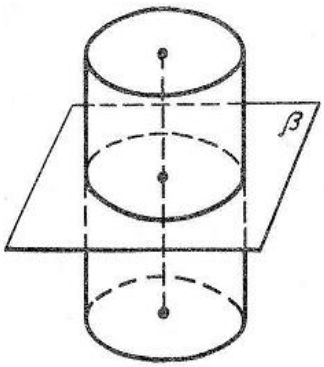
Doiralar silindrning asoslari deyiladi, doira aylanalari mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar silindrning yasovchilari deyiladi. Silindrning sirti asoslaridan va yon sirtidan tashkil topadi. Yon sirt yasovchilardan tuzilgan.

Silindrning yasovchilari asos tekisliklariga perpendikulyar bo‘lsa, bunday silindr to‘g‘ri silindr deyiladi. To‘g‘ri silindrni to‘g‘ri to‘rtburchakni aylantirish o‘qi vazifasini bajargan biror tomoni atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin.

Silindr asosining radiusi silindrning radiusi deyiladi. Silindr asosining tekisliklari orasidagi masofa silindrning balandligi deyiladi. Asoslarining markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq silindrning o‘qi deyiladi. Bu o‘q yasovchilarga parallel bo‘ladi. Silindrning o‘qi orqali o‘tuvchi kesim o‘q kesim deyiladi.

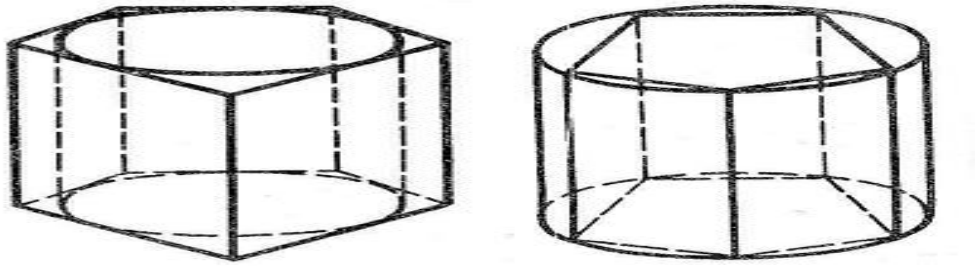
Silindrning yasovchisi orqali o‘tib, bu yasovchi orqali o‘tadigan o‘q kesimga perpendikulyar tekislik silindrning *urinma tekisligi* deyiladi.

Teorema. Silindr o‘qiga perpendikulyar tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo‘yicha kesadi (2-chizma).



2-chizma

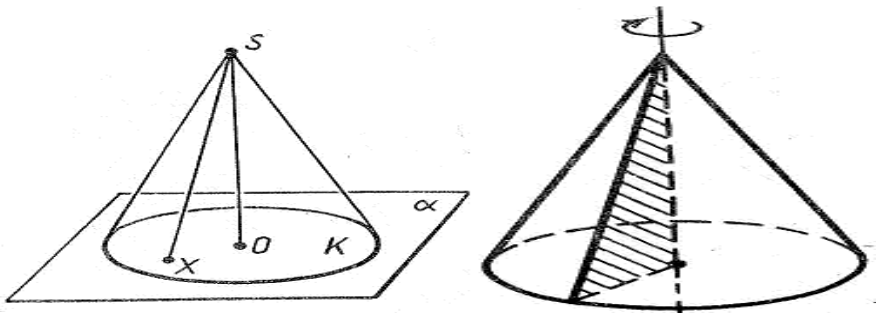
Silindrga *ichki chizilgan* prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko‘pburchaklardan iborat. Uning yon qirralari silindrning yasovchilari bo‘ladi (3-chizma).



3-chizma

Silindrga *tashqi chizilgan* prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga tashqi chizilgan teng ko‘pburchaklardan iborat. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi .

Konus. Konus (aniqrog‘i doiraviy konus) deb shunday jismga aytiladiki, u doira – konus asosidan, shu doira tekisligidagi yotgan nuqta-konusning uchidan va konusning uchini asosining hamma nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalardan iborat bo‘ladi. Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning yasovchilari bo‘ladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat.



4-chizma

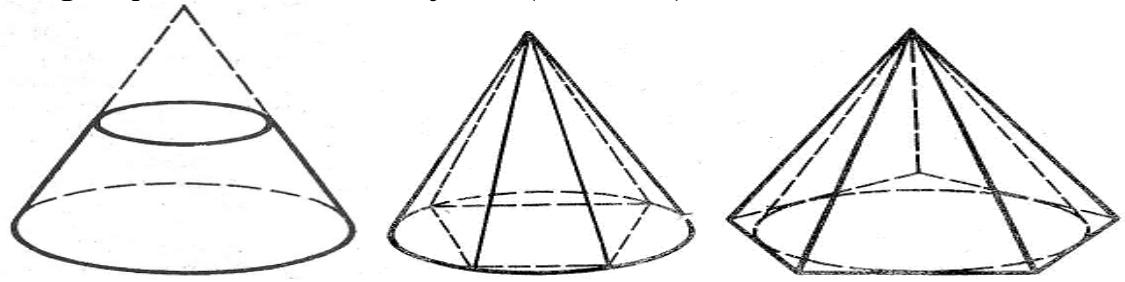
Konusning uchi bilan asos aylanasining markazini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq asos tekisligiga perpendikulyar bo‘lsa, bunday konus *to‘g‘ri konus* deyiladi.

To‘g‘ri konusni to‘g‘ri burchakli uchburchakni kateti atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin (4-chizma).

Konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikulyar konusning balandligi deyiladi. To‘g‘ri konus balandligining asosi asos markazi bilan ustma-ust tushadi. To‘g‘ri konusning balandligidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq uning *o‘qi* deyiladi. Konusning o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesimi *o‘q kesim* deyiladi. Konusning yasovchisi orqali o‘tuvchi va bu yasovchi orqali o‘tkazilgan o‘q kesimga perpendikulyar tekislik konusning *urinma tekisligi* deyiladi.

Teorema. Konusning o‘qiga perpendikulyar tekislik konusni doira bo‘yicha kesadi, yon sirtini esa markazi konusning o‘qida joylashgan aylana bo‘yicha kesib o‘tadi (teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi).

Konusning o‘qiga perpendikulyar tekislik undan kichik konus ajratadi. Qolgan qismi *kesik konus* deyiladi (5-chizma).



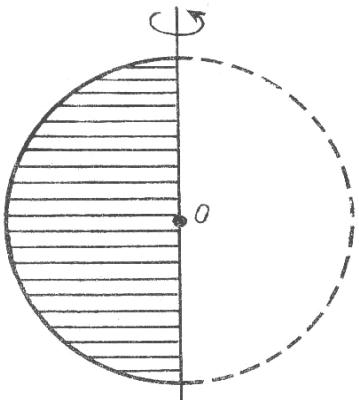
5-chizma

Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko‘pburchak bo‘lib, uchi esa konusning uchida bo‘lgan piramida konusga ichki chizilgan piramida deyiladi. Konusga ichki chizilgan piramidaning yon qirrasi konusning yasovchilari bo‘ladi. Asosi konusning asosiga tahqi chizilgan ko‘pbubrchak bo‘lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga tashqi chizilgan piramida deyiladi. Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo‘ladi (5-chizma).

Shar. Fazoda markaz deb ataluvchi bitta nuqtadan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o’rni shar sirti yoki sferik sirt deyiladi. Bunday sirt bilan chegaralangan jism shar deyiladi. Berilgan nuqta sharning markazi, berilgan masofa esa sharning radiusi deyiladi. Sharning chegarasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shunday qilib sharning markazidan radiusga teng masofa qadar uzoqlashgan hamma nuqtalari shar sirti yoki sfera deb ataladi.

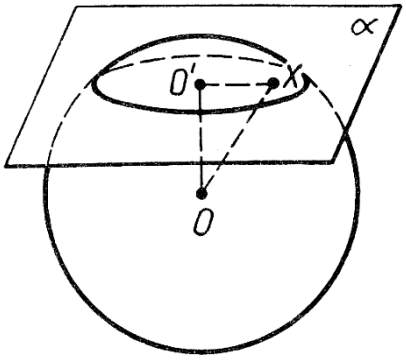
Shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi va sharning markazidan o‘tuvchi kesma diametr deyiladi. Istalgan diametrning uchlari (oxirlari) sharning diametral qarama-qarshi nuqtalari deyiladi.

Shar ham aylanma jism bo‘lgani uchun uni yarim doirani o‘zining diametri atrofida aylantirishdan ham hosil qilish mumkin (6-chizma).



6-chizma

1-teorema. Sharning har qanday tekislik bilan kesimi doiradir. Bu doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosidir.



7-chizma

Isbot. Aytaylik α-kesuvchi tekislik va O -sharning markazi bo‘lsin (7-chizma). Sharning markazidan α tekislikka OO^1 perpendikulyar tushiramiz. O^1 bilan perpendikulyarning asosini belgilaymiz. X – sharning α tekislikka tegishli ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Pifagor teoremasiga ko‘ra

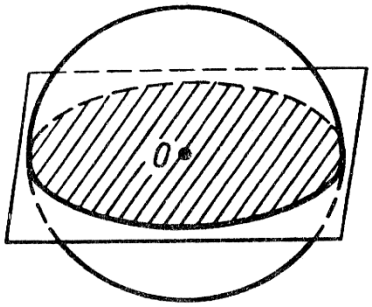
$$OX^2 = (OO')^2 + (O'X)^2$$

Ammo OX kesma sharning R radiusidan katta bo‘lmagani uchun

$$O'X \le \sqrt{R^2 - (OO')^2}$$

Demak, X nuqta markazi O' nuqtada va radiusi $R = \sqrt{R^2 - (OO')^2}$ ga teng doiraga tegishli. Aksincha, bu doiraning istalgan X nuqtasi sharga tegishli. Bu esa sharning α tekislik bilan kesimi markazi O' nuqtada bo‘lgan doira demakdir.

Teoremaning isbotidan sharning tekislik bilan kesimida hosil qilingan

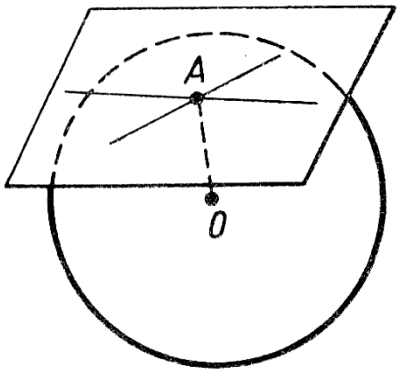


8-chizma

doiraning radiusini $R' = \sqrt{R^2 - OO^2}$ formula bo‘yicha hisoblash mumkin degan xulosa chiqadi. Bu esa shar markazidan bir xil uzoqlikdagi tekisliklar bilan kesilsa, teng doiralar hosil bo‘lishini ko‘rsatadi. α tekislik sharning markaziga qancha yaqin bo‘lsa α tekislik kesimidagi doira shuncha katta bo‘ladi. Sharning markazidan o‘tgan tekislik kesimida eng katta doira hosil bo‘ladi. Bu doiraning radiusi shar radiusiga teng (8-chizma).

Sharning markazidan o‘tadigan tekislik diametral tekislik deyiladi.

2-teorema. Sharning istalgan diametral tekisligi uning simmetriya tekisligi bo‘ladi. Sharning markazi uning simmetriya markazidir.



9-chizma

Shar sirtidagi *A* nuqtadan o‘tib shu nuqtaga o‘tkazilgan radiusga perpendikulyar tekislik urinma tekislik deyiladi. *A* nuqta urinish nuqtasi deyiladi (9-chizma).

3-teorema. Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga –urinish nuqtasiga ega.

4-teorema. Shar sirtidagi istalgan nuqtadan cheksiz ko‘p urinma o‘tadi, ularning hammasi sharning urinma tekisligida yotadi. (2-4 teoremalarni isboti talabalarga mustaqil ish qilib beriladi).

Masala. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalarini qanday yasash kerak?

Yechilishi. Parallel proyeksiyalashda to`g`ri chiziq kesishmalarining nisbati saqlanadi. Shuning uchun uchburchak tomonining o`rtasi bu tomon proyeksiyasining o`rtasiga proyeksiyalanadi. Demak, uchburchak medianalari proyeksiyalari uning proyeksiyasining medianalari bo`ladi.

Sfera tenglamasi. Sfera deb, fazoning berilgan nuqtasidan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Sfera tenglamasini tuzamiz. *S* feraning markazi *A(a, b, c)* nuqtada, radiusi esa *R* bo‘lsin (10-chizma). Sferaning nuqtalari fazoning shunday nuqtalaridan, bu nuqtadan *A* nuqtagacha masofa *R* ga teng. Sferaning ixtiyoriy (*x, y, z*) nuqtasidan *A* nuqtagacha masofaning kvadrati

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

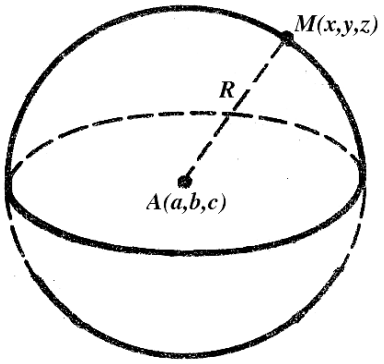
ga teng. Shuning uchun sferaning tenglamasi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

ko‘rinishga ega. Sferaning markazi koordinatalar boshi bo‘lsa, sferaning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Ikkita sferaning kesishgan chizig‘i aylanadan iborat bo‘ladi. Buni isbot qilish ham mumkin.



10-chizma

Savol va topshiriqlar

1. Aylanma sirtga ta’rif bering.
2. Silindr va konusga ta’rif bering.
3. Sharga ta’rif bering.
4. Sfera tenglamasini keltirib chiqaring.